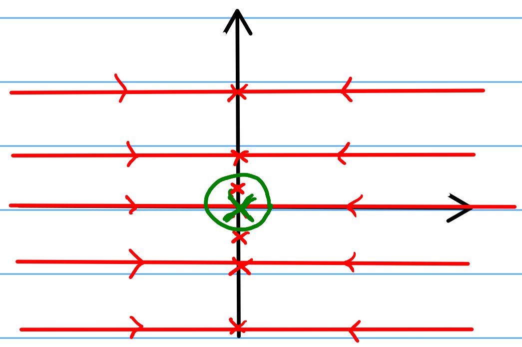
Def: $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación diferencial $\dot{x}=f(x)$. Un punto $\bar{x}\in\Omega$ es de equilibrio si $f(\bar{x})=0$. Decimos que

- $\bar{x}$ es estable si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \|\varphi_{x_0}(t)-\bar{x}\|<\varepsilon\ \forall t>t_0$
  $[\varphi_{x_0}: I(x_0)\to\mathbb{R},\ I(x_0)\supset[0,+\infty)]$
- $\bar{x}$ es asintóticamente estable si es estable y además $\exists\delta>0$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_{x_0}(t)=\bar{x}$.
- $\bar{x}$ es inestable si no es estable

1b) Dar un ejemplo de una ecuación diferencial que presente un punto de equilibrio estable pero no asintótico y además que exista una trayectoria (distinta a la de equilibrio) que tienda en el futuro a dicho punto.

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}X$$



El origen No es asintóticamente estable pues en todo entorno del origen encuentro otros puntos de equilibrio, que claramente no se acercan al origen.

5. Determinar los valores de a y b tal que

$V(x,y)=ax^2+by^2$ es de Lyapunov para

b) $\begin{cases}\dot{x}=-x^3+xy^2\\ \dot{y}=-2x^2y-y^3\end{cases}$

Es decir, que caiga en las hipótesis de alguno de los teoremas de Lyapunov.

- ¿Cuál es $\bar{x}$? ¿$f(x,y)=0$?

$$0 = -x^3 + xy^2 = x(-x^2+y^2) \to x=0 \text{ o } x^2=y^2$$

$$0 = -2x^2y - y^3 = y\cdot(-2x^2-y^2) \to y=0 \text{ o } 2x^2=-y^2$$

$$f(x,y)=0 \iff (x,y)=(0,0).$$

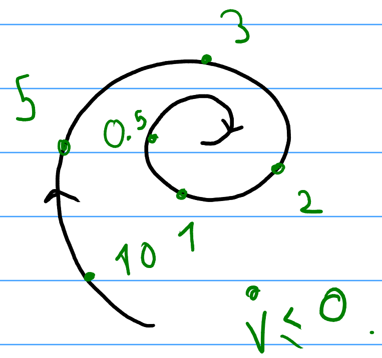
- Necesito $V: U\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(0,0)\in U$ y además

1) $(x,y)=(0,0)$ sea un mínimo estricto

2) $\dot V: U \to \mathbb{R}$,
   - $\to$ $\dot V(x) < 0 \ \forall x \in U - \{(0,0)\}$ (Lyap 2)
   - $\to$ $\dot V(x) \le 0 \ \forall x \in U$ (Lyap 1).

$$\dot V(x) := \frac{dV(\varphi_x(t))}{dt} = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

donde $\varphi_x(t)$ es la solución a $\begin{cases} \dot\varphi = f(\varphi) \\ \varphi(0) = x \end{cases}$



$$\begin{cases} \dot x = -x^3 + xy^2 \\ \dot y = -2x^2y - y^3 \end{cases} \qquad V(x,y) = ax^2 + by^2 \to a,b>0 \ \left(\text{Mínimo estricto}\right)$$

$$\dot V(x,y) = 2ax\dot x + 2by\dot y = \overbrace{2ax}^{\frac{\partial V}{\partial x}}\overbrace{(-x^3+xy^2)}^{f_1} + \overbrace{2by}^{\frac{\partial V}{\partial y}}\overbrace{(-2x^2y-y^3)}^{f_2}$$

$$= -2ax^4 + \underbrace{2ax^2y^2 - 4by^2x^2}_{0 \text{ si } 2a=4b} - 2by^4 = -2ax^4 - 2by^4 < 0 \text{ si } (x,y)\neq(0,0)$$

Por ejemplo $V(x,y) = 2x^2 + y^2$

Por Lyapunov 2 el origen es asintóticamente estable.

Otra:

$$\dot{V} = -2ax^4 + 2ax^2y^2 - 4by^2x^2 - 2by^4 < -2ax^4 + 4bx^2y^2 - 4bx^2y^2 - 2by^4$$

Si $\underline{2a < 4b}$ $\qquad = -2ax^4 - 2by^4 < 0$

Si $(x,y) \neq (0,0)$.

c) $\dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2$, $V(x,y) = ax^2 + by^2$, $a,b > 0$.

$\dot{y} = -y^3$ El punto de equilibrio es el $(0,0)$.

$$\dot{V}(x,y) = 2ax\left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2\right) + 2by(-y^3)$$

$$= -ax^4 + 4ax^2y^2 - 2by^4 = -aX^2 + 4aXY - 2bY^2$$

$X = x^2$ Tengo una forma cuadrática y quiero que sea

$Y = y^2$ definida negativa. $\Leftrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -a & 2a \\ 2a & -2b \end{pmatrix}$$ tiene valores propios negativos.

$Tr(A) = -a - 2b < 0 \Rightarrow$ Hay un valor propio negativo

Quiero que $\det(A) > 0$ así los dos valores propios tienen igual signo.

$\det(A) = 2ab - 4a^2 > 0 \Leftrightarrow b > 2a.$

Entonces si $b > 2a \Rightarrow V$ es de Lyapunov (2).
$a, b > 0$

$\Rightarrow$ El origen es asintoticamente estable.

A mano.

$$\dot{V}(x,y) = 2ax\left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2\right) + 2by(-y^3)$$

$$= -ax^4 + 4ax^2y^2 - \underbrace{2by^4}_{\uparrow} < -ax^4 + 4ax^2y^2 - 4ay^4$$

$$= -a(x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4)$$

$$b > 2a \quad \longrightarrow \quad 2b > 4a \qquad = -a(x^2 - 2y^2)^2 \lesssim 0$$

$\forall \delta > 0 \; \exists \, t_\delta > 0, \quad d(X(t_\delta), x_0) < \delta$

$\forall \delta > 0 \; \exists \, t_\delta > 0, \quad d(X(t), x_0) < \delta \;\; \forall t > t_\delta.$

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0$ tal que si: $d(\tilde{x}_0, x_0) < \delta \Rightarrow d(\tilde{X}(t), x_0) < \varepsilon$
$\underline{\underline{\forall t > 0}}$

Si $d(X(t_\delta), X_0) < \delta \Rightarrow \quad d(X(t), x_0) < \varepsilon \;\; \forall t > t_\delta$