Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

9. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' = p(x) + q(x)y$ es la ecuación de Riccati

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.) \leftarrow y_1 \qquad y = y_1 + z$$

En general, esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

a) Demostrar esto último.

b) Hallar la solución general de la ecuación $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, sabiendo que tiene $y_1(x) = x$ como solución particular

c) Resolver la ecuación $y' = y^2 - 2y - x^4 + 2x + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.

a) Conocemos y_1 solución de $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ (*)

Sea $y(x)$ una solución cualquiera de (*)

Defino $z(x) = y(x) - y_1(x) \Rightarrow y(x) = y_1(x) + z(x)$

Falta ver que z satisface $z' - (q + 2ry_1)z = rz^2$

$$z' = y' - y_1' = p + qy + ry^2 - (p + qy_1 + ry_1^2)$$

$$= q\underbrace{(y - y_1)}_{z} + r(y^2 - y_1^2) = qz + r(y^2 - y_1^2) = ⊛$$

$$r(y^2 - y_1^2) = r\Big(\underbrace{(y-y_1)^2}_{z^2} + \underbrace{y^2 - y_1^2 - (y-y_1)^2}_{-2y_1^2 + 2yy_1}\Big) = r\big(z^2 + y_1(2y - 2y_1)\big)$$
$$= r(z^2 + 2y_1z)$$

$$⊛ = \underbrace{q}z + rz^2 + \underbrace{2ry_1}z = z'$$

$$z' - z(q + 2ry_1) = rz^2 \quad //$$

b) Hallar la solución de $y' = \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}y}}_{q(x)} + \overbrace{x^3}^{r(x)}y^2 \underbrace{-x^5}_{p(x)}$

Una solución es $y_1(x) = x$.

Si $y(x)$ es una solución $\Rightarrow y(x) = x + z(x)$

Con z satisfaciendo la ecuación $z' - z\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = x^3 z^{2}$ n

$w = \frac{1}{z^{n-1}}$

$w = 1/z$

$$\Rightarrow \quad w' = -\frac{1}{z^2} z' = -\frac{1}{z^2}\left(z\left(\frac{1}{x}+2x^4\right) + x^3 z^2\right) = -\boxed{\frac{1}{z}}^{w}\left(\frac{1}{x}+2x^4\right) - x^3$$

$$\Rightarrow \quad w' + w\left(\frac{1}{x}+2x^4\right) = -x^3$$ Lineal de primer orden.

1) $w' + w\left(\frac{1}{x}+2x^4\right) = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -\frac{1}{x} - 2x^4$

$$\Rightarrow \ln|w| = \underbrace{-\ln|x|}_{\ln\frac{1}{|x|}} - \frac{2x^5}{5} + C \Rightarrow |w| = e^{\ln\frac{1}{|x|} - \frac{2x^5}{5} + C}$$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot e^{-\frac{2x^5}{5}} \cdot K$$ positivo.

$$\Rightarrow w_H(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{\tilde{K}} \cdot \frac{1}{x} e^{-\frac{2x^5}{5}}$$

2) Hallar una solución de $w' + w\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = -x^3$ (▲)

Voy a probar con: $w_p(x) = \tilde{K}(x) \boxed{\frac{e^{-\frac{2x^5}{5}}}{x}} = \tilde{K}(x) \cdot w_H(x)$

$$w' = \tilde{K}' w_H + \tilde{K} \cdot w_H'$$

Sustituyo en (▲) $$\underbrace{\tilde{K}' w_H + \tilde{K} w_H' + \tilde{K} w_H\left(\frac{1}{x}+2x^4\right)}_{\tilde{K}\left(\underbrace{w_H' + w_H\left(\frac{1}{x}+2x^4\right)}_{0}\right)} = -x^3 \Rightarrow \tilde{K}' w_H = -x^3$$

$$\Rightarrow \tilde{K}'(x) \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}}}{x} = -x^3 \Rightarrow \tilde{K}'(x) = -x^4 e^{+\frac{2x^5}{5}}$$

$$\Rightarrow \tilde{K}(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2x^5}{5}}$$

$$w_p(x) = \tilde{K}(x)\, w_H(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{2x^5}{5}} \cdot \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}}}{x} = -\frac{1}{2x}$$

Chequeamos: $$w_p' + w_p\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = \underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{} + \underbrace{\frac{-1}{2x}\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)}_{}$$

$$= -\frac{\cancel{2}x^3}{\cancel{2}} = -x^3 \checkmark$$

$$\left(w' + w\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = -x^3 \right)$$

$$w(x) = K\frac{e^{-\frac{2x^5}{5}}}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{2Ke^{-\frac{2x^5}{5}} - 1}{2x}$$

$z = \frac{1}{w}$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{2x}{2Ke^{-\frac{2x^5}{5}} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y_1(x) + z(x) = x + \frac{2x}{2Ke^{-\frac{2x^5}{5}} - 1}}$$

//

$\dot y + ay = f(x)$ $\qquad$ $\boxed{\ddot y + a\dot y + by = f(x)}$ para algunas.

y $\qquad$ b

$$s^2 \underbrace{Y(s)}_{} + a\,s\,Y(s) + bY(s) = F(s)$$

$s \in \mathbb{C}$

$Y: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$y(x) \longleftrightarrow Y(s)$?

$f(x) \longleftrightarrow F(s)$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} \longrightarrow y(t)$$

Sobre el método de fasores (se ve en física 3)

$\ddot y + a\dot y + by = \sin(x)$; $\quad \lambda = a + ib$ raíz pol característico

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cdot \cos(bx) + C_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx) + \boxed{A_0 \operatorname{sen}(x) + B_0 \cos(x)}$$

Dependiendo cond inicial

Fasores me permite calcular esto

Lo que sucede en física 3 es que $a<0$ y x representa el tiempo

$\Rightarrow$ La parte homogénea tiende a 0 cuando avanza el tiempo.

Consultas

14. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones diferenciales $y''+ay'-2y=0$ y $y''-2y'+ay=0$ tengan soluciones en común además de $y(x)=0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

Para cada a tengo un plano p

$$\begin{cases} y''+ay'-2y=0 \\ y''-2y'+ay=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Encontrar a para que tengan soluciones en común.

Para cada a tengo un plano p'

Si tengo y solución en común entonces resto las ecuaciones

$$ay'-2y-(-2y'+ay)=0 \Leftrightarrow (a-2)y'+y(-2-a)=0$$

Si $a=2 \Rightarrow y\underbrace{(-2-a)}_{-4}=0 \Rightarrow y=0$

Si $a\neq 2 \Rightarrow$ Hay soluciones no triviales: $y(x) = K \cdot e^{\frac{2+a}{(a-2)}x}$

$\Rightarrow$ Necesito que $Ke^{\frac{2+a}{2-a}x}$ sea solución de $\cdot\ y''+ay-2y=0$

$\cdot\ y''-2y'+ay=0$

$\Rightarrow \frac{2+a}{a-2}$ tiene que ser raíz de $\lambda^2+a\lambda-2=0$ y de $\lambda^2-2\lambda+ay=0$

$\Rightarrow$ Se necesita tener una raíz común de los polinomios característicos

$$\begin{cases} \lambda^2 + a\lambda - 2 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + a = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+2)\lambda - (2+a) = 0$$

$$\lambda = \frac{(2+a)}{(a+2)}$$

//