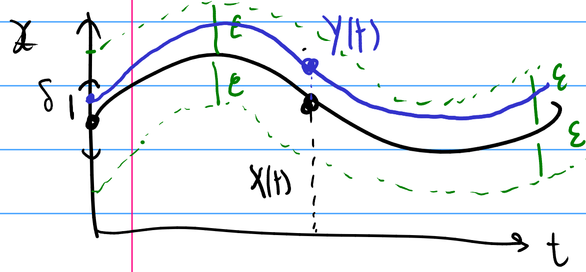
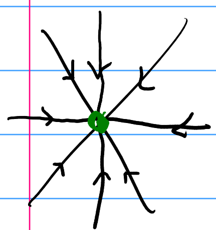
Def: Sea la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$

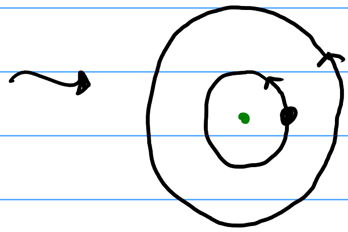
- Decimos que una solución $X(t)$ es estable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall$ $Y(t)$ es otra solución con $\| Y(0) - X(0) \| < \delta$ $\Rightarrow \| Y(t) - X(t) \| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$.

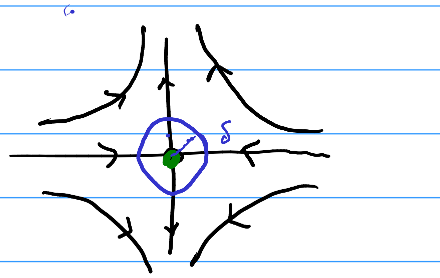


- Decimos que $X(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además $\exists \delta$ tal que $\forall Y(t)$ es solución con $\| Y(0) - X(0) \| < \delta \Rightarrow$ $\lim_{t \to +\infty} (Y(t) - X(t)) = \vec{0}$.

- Decimos que es inestable si no es estable



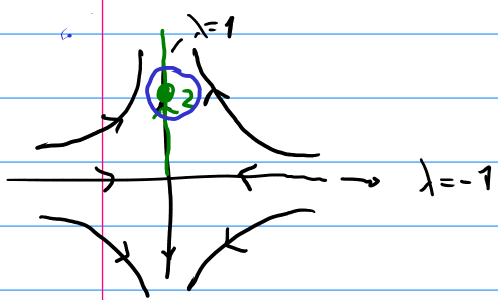




$X(t) = 0 \ \forall t$ es solución asintóticamente estable

$X(t) = 0 \ \forall t$ es solución es estable.

$X(t) = 0 \ \forall t$ inestable



$X(t) = (0, 2e^t)$ es inestable

Ya que dado δ tomo $Y(t) = (0, (2 - \delta/2) e^t)$.

Se tiene que $\| X(0) - Y(0) \| = \| (0, \delta/2) \| < \delta$ pero $X(t) - Y(t) = (0, \delta/2 \, e^t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

en particular la separan ε ($\forall \varepsilon$) en algún momento.

Prop: Sea $\dot{X} = AX$ entonces $X(t) = 0 \; \forall t$ es estable $\Leftrightarrow$ Cualquier otra solución lo es.

Teo: Sea $\dot{X} = Ax$, entonces

1) Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa $\Rightarrow$ Toda solución es asintóticamente estable.
2) Si $\exists$ λ valor propio con parte real positiva $\Rightarrow$ Toda solución es inestable.
3) ¿Qué sucede si $Re(\lambda) \leq 0 \; \forall \lambda$? Ver notas.

13). Se considera $\dot{x} = Ax$ y se define

$$E^s = \bigoplus_{Re(\lambda)<0} E_\lambda \quad , \quad E^u = \bigoplus_{Re(\lambda)>0} E_\lambda \quad , \quad E^c = \bigoplus_{Re(\lambda)=0} E_\lambda$$

donde $E_\lambda = Ker(A - \lambda I)^m$ donde m es la $ma(\lambda)$.

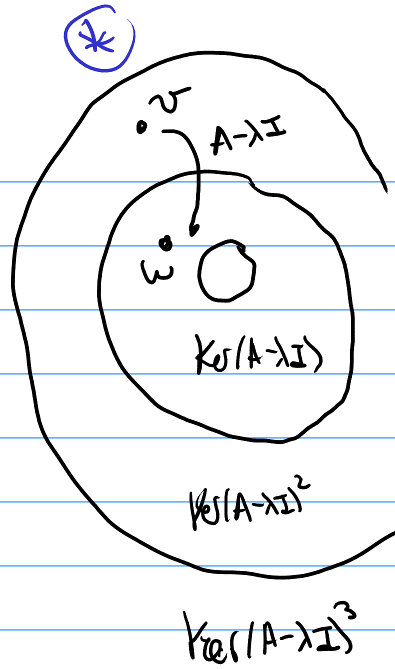
Recordar $E_1 + E_2 := \{ v_1 + v_2 : v_1 \in E_1, v_2 \in E_2 \}$ y se dice que la suma es directa si $\forall w \in E_1 + E_2$ $\exists!$ forma de escribirlo como suma de vectores de E_1 y E_2, es decir, si $w = v_1 + v_2 = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$, $v_1, \tilde{v}_1 \in E_1$, $v_2, \tilde{v}_2 \in E_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = \tilde{v}_1 \\ v_2 = \tilde{v}_2 \end{array}.$$

(a) Demostrar que E_λ es invariante por A | $A E_\lambda \subset E_\lambda$)

Si $v \in E_\lambda \Rightarrow (A - \lambda I)^m v = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda I)^{m-1} (A - \lambda I)(v) = 0$

$\Rightarrow \quad (A-\lambda I)(v) \in Ker(A-\lambda I)^{m-1}$



$\Rightarrow \quad Av - \lambda v = w$, con $w \in Ker(A-\lambda I)^{m-1}$

$\Rightarrow \quad Av = w + \lambda v \quad \Rightarrow \quad Av \in Ker(A-\lambda I)^m.$

$w \in Ker(A-\lambda I)^{m-1}$, $\lambda v \in Ker(A-\lambda I)^m$

$w \in Ker(A-\lambda I)^{m-1} \Rightarrow w \in Ker(A-\lambda I)^m$

(b) Si φ es solución de $\dot{X} = AX$ con $\varphi(0) \in E_\lambda \Rightarrow$

$\varphi(t) \in E_\lambda \ \forall t.$

Dem: Sea E subespacio invariante por A y φ solución con $\varphi(0) \in E$

Considero $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^n$ con $\{v_1, \dots, v_k\} \xrightarrow{b} E$.

$$\Rightarrow \ {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3\cdots & k \end{array} \\ k & \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array} , \quad B \in M_{k \times k},$$

Por ejemplo $\underline{n=3}$ y $\dim E = 2$, $\quad {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & h \\ c & d & J \\ \hline 0 & 0 & K \end{array}\right)$

Por c.v tengo que

$$\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} + b\tilde{y} + h\tilde{z}$$
$$\dot{\tilde{y}} = c\tilde{x} + d\tilde{y} + J\tilde{z}$$
$$\dot{\tilde{z}} = K\tilde{z}. \quad (*)$$

Como $\varphi(0) \in E \Rightarrow \varphi(0) = \tilde{x}_0 v_1 + \tilde{y}_0 v_2 + 0 v_3.$ entonces

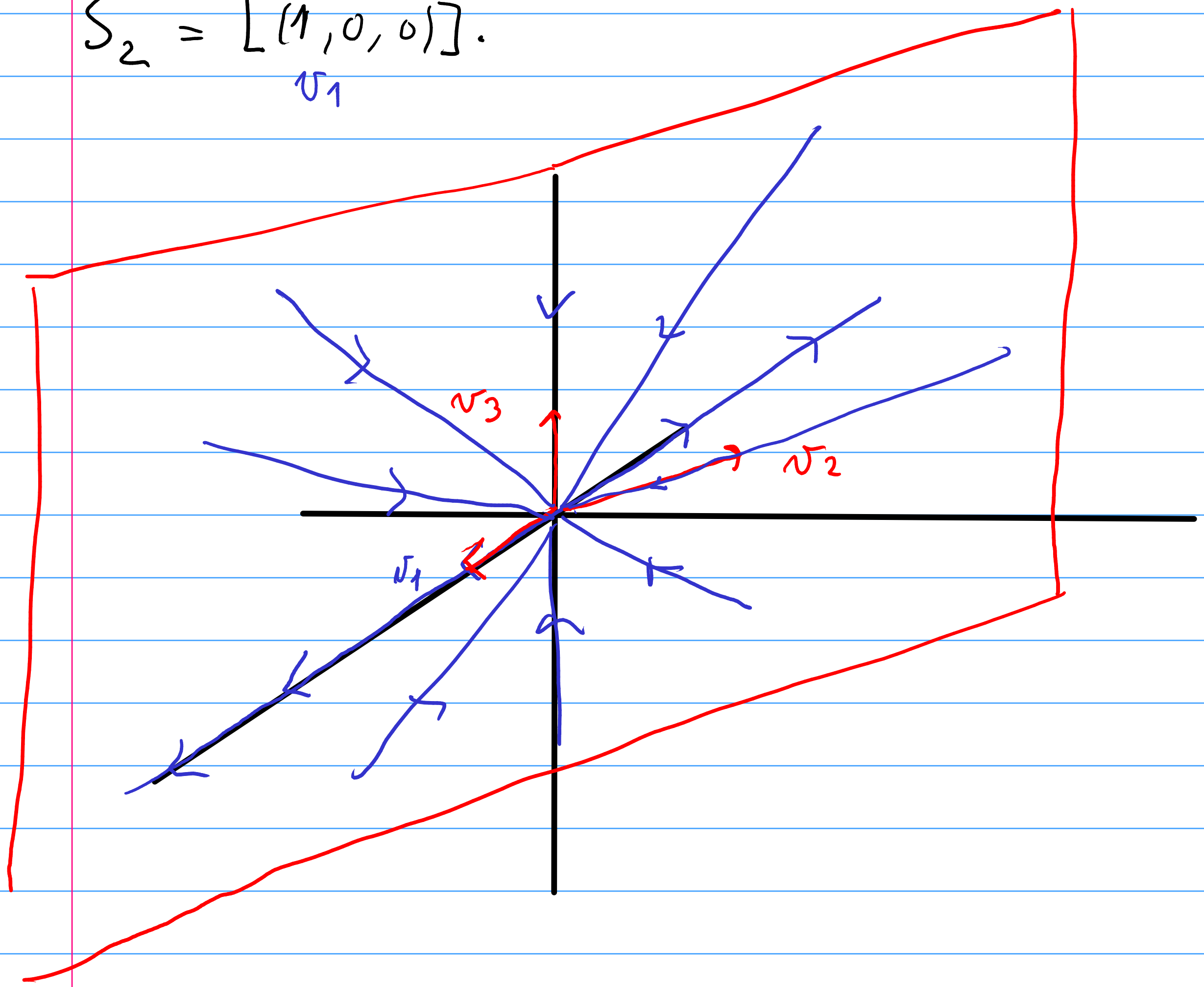
por (*) $\tilde{z}(t) = 0 \ \forall t. \Rightarrow \varphi(t) = \tilde{x}(t) v_1 + \tilde{y}(t) v_2 \Rightarrow \varphi(t) \in E.$

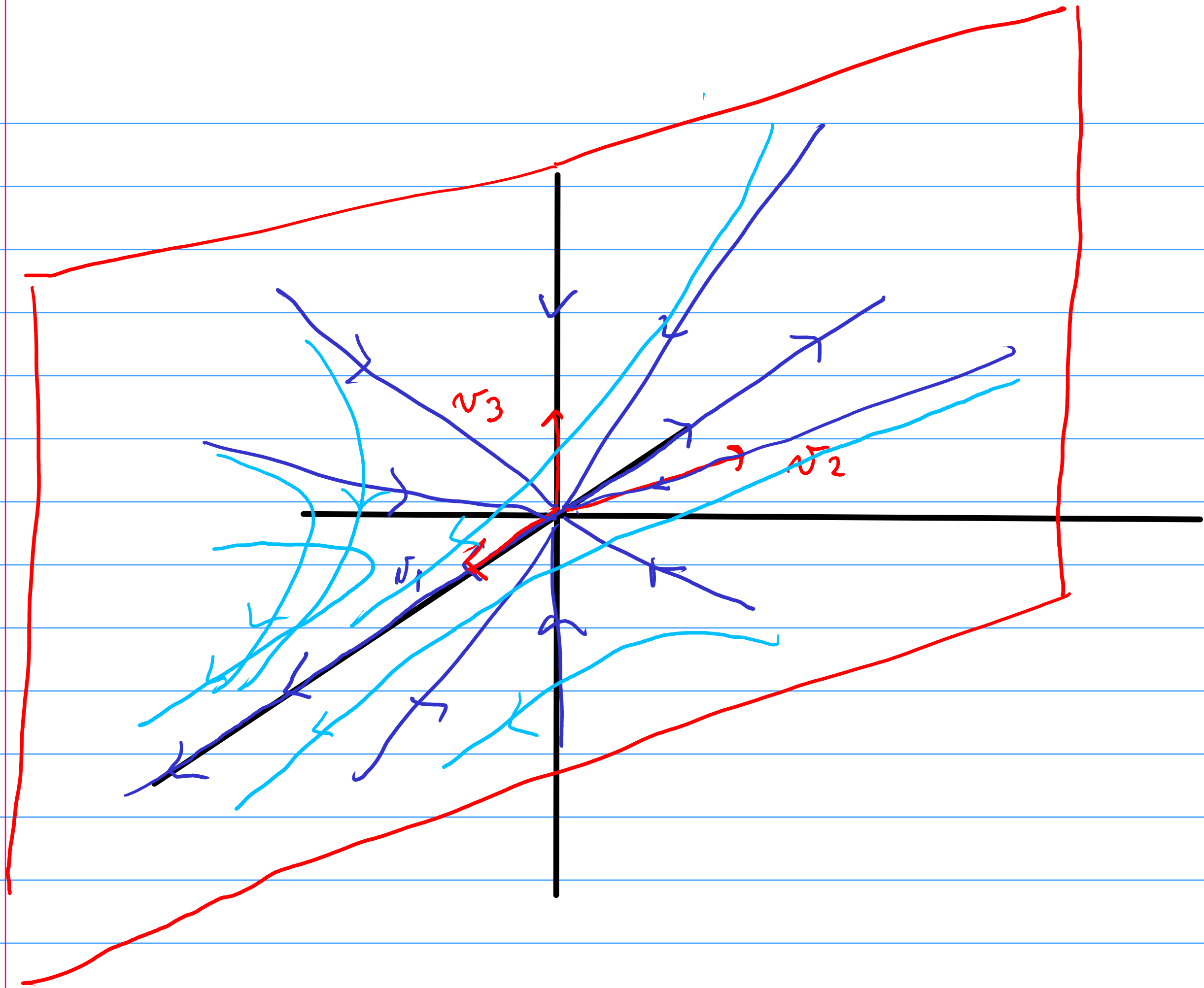
(c) Encontrar E^s, E^u, E^c y esquematizar diagrama de fase de

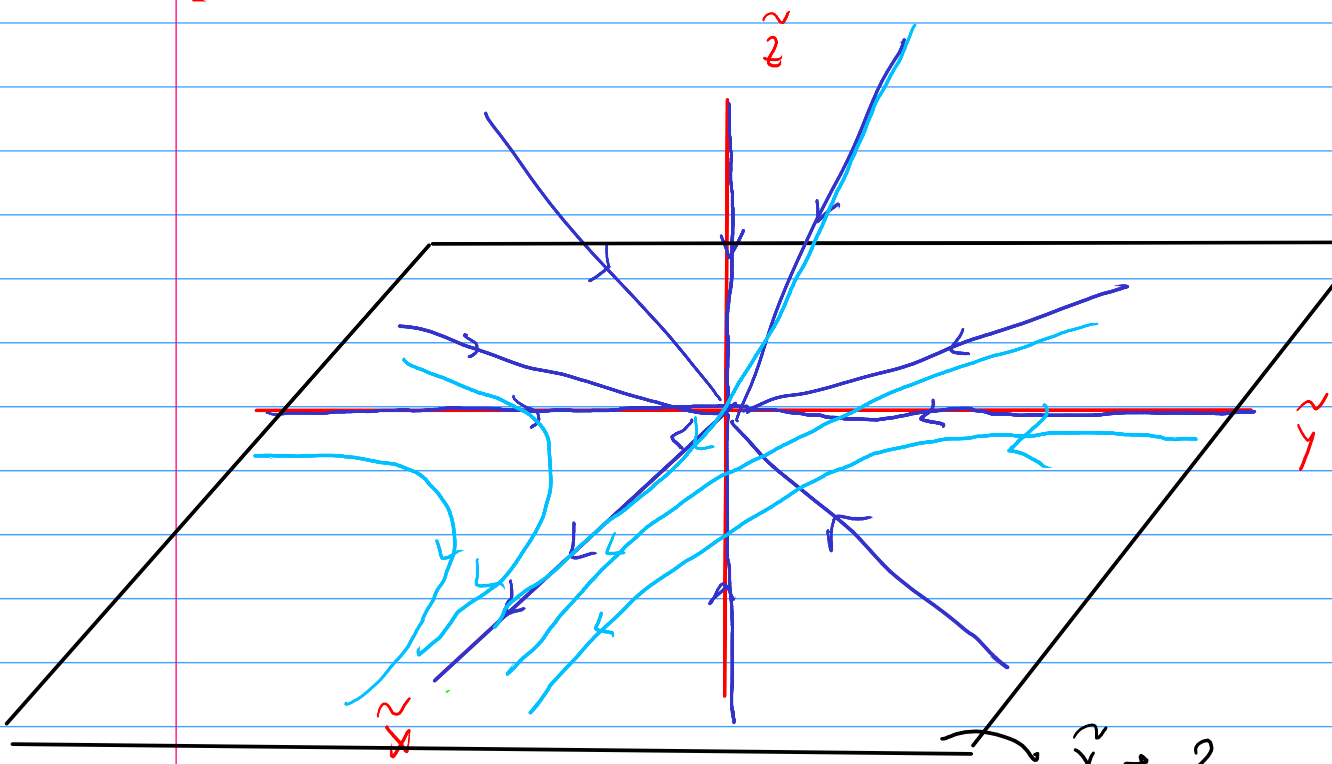
$$\dot{X} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) X \qquad \begin{array}{l} \lambda = -1 \text{ doble} \\ \lambda = 2 \text{ simple} \end{array}$$

$$S_{-1} = [\underset{v_2}{(-1,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)}]$$

$$S_2 = [\underset{v_1}{(1,0,0)}].$$







$\tilde{x} \to 2$

$\tilde{y} \to -1$

Una trompeta !!

- Todos las soluciones son inestables.

- E^s = Plano yz — E^u = Eje x — $E^c = \{0\}$

Acá la dinámica es asintóticamente estable. //