Ejercicio 2.

a) Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son las soluciones estacionarias ( $\partial_t u(x,t) = 0$ ).

Hallar una solución estacionaria de $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = A, \quad u(L,t) = B \end{cases}$

¡No son 0!

* No hay condición ~~condición~~ inicial ( $u(x,0)$ ). • Me piden que la solución sea estacionaria

$\partial_t u = 0 \Rightarrow u(x,t) = u_e(x)$, pero $\partial_t u = \partial_x^2 u \Rightarrow \partial_x^2 u = 0$

$$\Rightarrow u_e(x) = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}} = \left(\frac{B-A}{L}\right) x + A$$

$$\left.\begin{array}{l} u_e(0) = u(0,t) = A \\ u_e(L) = u(L,t) = B \end{array}\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = u_e(x) = \frac{(B-A)}{L} x + A}$$

b) Hallar la solución, $u(x,t)$, de $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{cases}$

* Diferencias con el problema del teórico.
• $u(1,t) = 1$.

$$u(x,t) = v(x,t) + \overbrace{u_e(x)}^{x} = v(x,t) + x$$

¿Qué satisface $v$?

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 = (\partial_t v - \partial_x^2 v) + \overbrace{(\partial_t u_e - \partial_x^2 u_e)}^{0}$$

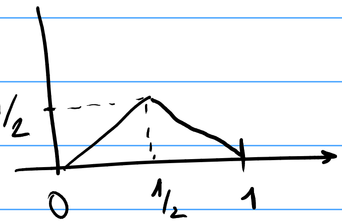
$$\Rightarrow \boxed{\partial_t v - \partial_x^2 v = 0}$$

- $0 = u(0,t) = v(0,t) + \overbrace{u_e(0)}^{0} = v(0,t) \Rightarrow \boxed{v(0,t) = 0}$

- $1 = u(1,t) = v(1,t) + u_e(1) = v(1,t) + 1 \Rightarrow \boxed{v(1,t) = 0}$

- $$\begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases} = u(x,0) = v(x,0) + u_e(x) = v(x,0) + x$$

$$\boxed{\Rightarrow \underset{V_0(x)}{\underset{\parallel}{v(x,0)}} = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1-x & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases} =}$$



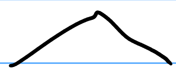

La v satisface el problema visto en el teórico.

**Teorema 0.1.**

*Sea* $V_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *condición inicial del problema de Cauchy-Dirichlet . Si* $\sum_{k=1}^{n} |b_k|$ *es convergente entonces:*

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \tag{0.8}$$

*es solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condición de bordes nulas y condición inicial* $V_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(kx)$. *Además* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ *converge uniformemente.*

Entonces debo escribir $V_0(x) =$  como una serie de Fourier tipo seno y así encuentro los $b_k$.

$$b_k = 2\int_0^1 V_0(x) \cdot \sin(k\pi x)\,dx = 2\left[\int_0^{1/2} x \sin(k\pi x)\,dx + \int_{1/2}^{1} (1-x)\sin(k\pi x)\,dx\right]$$

$$= 2\left[-x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx + -(1-x)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right]$$

$$= 2\left[-\cancel{\frac{\cos(k\pi/2)}{2k\pi}} + \cancel{\frac{\cos(k\pi/2)}{2k\pi}} + \int_0^{1/2}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx - \int_{1/2}^{1}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_0^{1/2} - \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_{1/2}^{1}\right] = 2\left[2\cdot\frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}\right] = \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

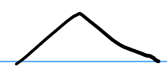
Uniforme.

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} \cdot \sin(k\pi x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

<u>Obs</u>: Se cumple la hipótesis del teorema, $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < \infty$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} \cdot \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

es solución de
$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v = 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) = \end{cases}$$



Conclusión:

$$u(x,t) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} \cdot \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t} \quad //$$

<u>Obs</u>:
- $u(x,0)$ es continua pero no derivable
- $u$ en $(0,L) \times (0,+\infty)$ es $C^\infty$.

c) Hallar una estimación de $|u(x,t) - u_e(x)|$ y probar que $u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} u_e(x)$

- De hecho "si $t$ lo imagino como índices naturales" tengo una sucesión de funciones de $x$, y hay convergencia uniforme
- Es decir, $\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t) - u_e(x)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$$|u(x,t) - u_e(x)| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot \sin(k\pi x) \cdot e^{-(k\pi)^2 t} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| b_k \cdot \sin(k\pi x) \cdot e^{-(k\pi)^2 t} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| \, e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$= |b_1| e^{-\pi^2 t} + |b_2| \underbrace{e^{-2^2\pi^2 t}}_{\leq e^{-\pi^2 t}} + |b_3| \underbrace{e^{-3^2\pi^2 t^2}}_{< e^{-\pi^2 t}} + \dots \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| \, e^{-\pi^2 t}$$

$$= \underbrace{e^{-\pi^2 t}}_{\substack{\to 0 \\ t \to +\infty}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| \right)}_{\mathbb{R}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$