PRÁCTICO 9. POLINOMIO DE TAYLOR

Recordar que el polinomio de Taylor de orden n de f en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ está dado por

$$P_f(h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \frac{1}{3!} d^3 f_a(h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f_a(h)$$

donde $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_k)$ y

$$d^k f_a(h) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k},$$

por ejemplo, para dos variables tenemos:

$$d^k f_a(h_1, h_2) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \binom{k}{i} (a) h_1^{k-i} h_2$$

y para orden 2, el desarrollo de Taylor queda:

$$P_f(h) = f(a) + f_x(a)h_1 + f_y(a)h_2 + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a)h_1^2 + 2f_{xy}(a)h_1h_2 + f_{yy}(a)h_2^2\right)$$

→ Ejercicio 2.

a. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}$, considerando $f(x,y) = xy - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$, tenemos

que:

$f_x(x,y) = y - \cos(x)\operatorname{sen}(y) \to f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = x - \operatorname{sen}(x)\cos(y) \to f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \to f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1 - \cos(x)\cos(y) \to f_{xy}(0,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \to f_{yy}(0,0) = 0$

En un entorno de $(0,0)$, y observando que $f(0,0) = 0$, se cumple que $f(x,y) = r_2(x,y)$ donde $\frac{r_2(x,y)}{\|(x,y)\|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

HOJA

FECHA

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2+y} - (1+y+y^2/2)}{x^2+y^2}$

Si $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y} \to f(0,0)=1$, $f_x(x,y) = 2x\, e^{x^2+y^2+y}$, $f_y(x,y) = (2y+1)\, e^{x^2+y^2+y}$,
$f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2+y^2+y} + 4x^2 e^{x^2+y^2+y}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x(2y+1)\, e^{x^2+y^2+y}$,
$f_{yy}(x,y) = 2e^{x^2+y^2+y} + (2y+1)^2 e^{x^2+y^2+1}$

Evaluando todo en $(0,0)$, obtenemos el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$

$$f(x,y) = 1 + y + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+y+x^2+3x^2/2-1-y-y^2/2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

→ Ejercicio 4. $f(x,y,z) = \frac{yz}{x}$, $a=(1,0,0)$

$f(1,0,0) = 0$
$f_x(x,y,z) = -yz/x^2$
$f_y(x,y,z) = z/x$
$f_z(x,y,z) = y/x$
$f_{xx}(x,y) = 2yz/x^3$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -z/x^2$
$f_{xz}(x,y) = f_{zx}(x,y) = -y/x^2$
$f_{yz}(x,y) = f_{zy}(x,y) = 1/x$
$f_{yy}(x,y) = 0$
$f_{zz}(x,y) = 0$

$f_{xxx}(x,y) = -6yz/x^4$
$f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) = 2z/x^3$
$f_{xxz}(x,y) = f_{xzx}(x,y) = f_{zxx}(x,y) = 2y/x^3$
$f_{xyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) = 0$
$f_{xzz}(x,y) = f_{zxz}(x,y) = f_{zzx}(x,y) = 0$
$f_{yzz}(x,y) = f_{zyz}(x,y) = f_{zzy}(x,y) = 0$
$f_{yyz}(x,y) = f_{yzy}(x,y) = f_{zyy}(x,y) = 0$
$f_{xyz}(x,y) = f_{xzy}(x,y) = f_{yxz}(x,y) = f_{yzx}(x,y)$
$= f_{zxy}(x,y) = f_{zyx}(x,y) = -1/x^2$

⇒ Si $v=(x-1,y,z)$

$$f(x,y,z) = \cancel{f(1,0,0) + d_{(1,0,0)} f(x-1,y,z)} + \frac{d^2_{(1,0,0)}}{2} f(x-1,y,z) + \frac{1}{3!} d^3_{(1,0,0)} f(x-1,y,z) + r_3(x-1,y,z)$$

$$= +\frac{1}{2}(2yz) + \frac{1}{3!}\cdot 6 \cdot (-1)(x-1)yz = yz - (x-1)yz + r_3(x-1,y,z)$$

→ Ejercicio 5. $f(x,y,z) = xyz^2$. Como $d^n_{(0,1,-1)} f(x, y-1, z+1)$ es un polinomio de orden n en potencias de $x, y-1, z+1$, alcanza escribir a f como su desarrollo de Taylor en $(0,1,-1)$. Además, f ya es un polinomio de orden 4 ⇒ para $n>4$, $d^n_{(0,1,-1)} f = 0$, es decir, alcanza hacer el desarrollo de orden 4.

Si tomamos $g_1(x) = x$, $g_2(y) = y$, $g_3(z) = z^2$ ⇒ $f(x,y,z) = g_1(x)\, g_2(y)\, g_3(z)$

⇒ alcanza hacer sus desarrollos y multiplicar

En $x=0$, $g_1(x) = x$
En $y=1$, $g_2(y) = 1 + (y-1)$
En $z=-1$, $g_3(z) = 1 + 2(z+1) + (z+1)^2$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x(1+(y-1))(1-2(z+1)+(z+1)^2) = (x + x(y-1))(1-2(z+1)+(z+1)^2)$$
$$= x + x(y-1) - 2x(z+1) - 2x(y-1)(z+1) + x(z+1)^2 + x(y-1)(z+1)^2.$$

2° PARCIAL, 2° SEMESTRE 2018

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = 1-\sqrt{1+x^2+y^2} = 1-(1+x^2+y^2)^{1/2}$

$\Rightarrow f_x(x,y) = -\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x = -(1+x^2+y^2)^{-1/2}x \rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = -1/2\,(1+x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y = -(1+x^2+y^2)^{-1/2} \cdot y \rightarrow f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = -(1+x^2+y^2)^{-1/2} + x/2\,(1+x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x \rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x/2 \cdot (1+x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2y \rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -(1+x^2+y^2)^{-1/2} + y/2\,(1+x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2y \rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$

$\Rightarrow f(x,y) = 0 + \frac{1}{2}(-x^2-y^2) + r_2(x,y) = -(x^2+y^2)/2 + r_2(x,y)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-(x^2+y^2)/2 + r_2(x,y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -\dfrac{1}{2}.$