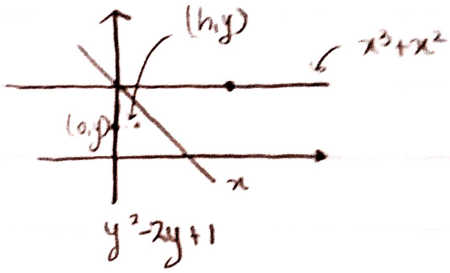
→ Ejercicio 13. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq

$$f(x,1) = x^3 + x^2 \quad \forall x \neq 0$$
$$f(0,y) = y^2 - 2y + 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$f(x, 1-x) = x \quad \forall x \neq 0$$

Sea $(x,y) = (0,y)$ $\Rightarrow$ en un entorno de $(0,y)$ existen puntos (h,y), $h \neq 0$ donde no necesariamente conocemos la definición de la función. Sin embargo, si nos movemos en la segunda coordenada, la definición no cambia, entonces conocemos $f(0, y+h)$ y $f(y)$ $\Rightarrow$ podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ pero no $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$



$$\searrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y - 2$$

En los puntos de la forma $(x,1)$ tenemos el caso inverso. Si tomamos $(x+h, 1)$, la definición de f es la misma $\Rightarrow$ podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)$ pero no $\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)$ $\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 3x^2 + 2x$

En los puntos de la forma $(x, 1-x)$ tenemos aún mas problemas pues si nos movemos en la primera coordenada, obtenemos $(x+h, 1-x)$ y no conocemos la definición $\forall h$ (en el caso $h = -x$ sí pero acordarse que luego tenemos que tomar límite en h). Y si nos movemos en la segunda, obtenemos $(x, 1-x+h)$ y tenemos el mismo problema $\Rightarrow$ no podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ en los puntos $(x, 1-x)$

→ El gradiente solo puede calcularse en $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+h^2-1+2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3+h^2}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-2(1+h)+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{2h}+h^2-2-\cancel{2h}+\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\rightarrow \nabla_{(0,1)} f = (0,0)$$

b. Calculamos, con $v=(1,-1)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,1-t)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

c. Como solo conocemos la definición de f en rectas, no podemos saber dónde f es diferenciable pues para serlo debe ser posible aproximarla con una transformación lineal EN UN ENTORNO

Igualmente, podemos afirmar que NO es diferenciable en $(0,1)$.
Si lo fuera $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \langle \nabla_{(0,1)} f, (1,-1)\rangle = \langle (0,0),(1,-1)\rangle = 0$

pero ya vimos que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 1$.

→ Ejercicio 16.

a. $f(u,v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)}, \operatorname{arctg}(u/v) \right)$, $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen}(y))$

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \left(-12 \cdot \frac{2u}{u^2+v^2}\right) / (\log(u^2+v^2))^2 & \left(-12 \cdot \frac{2v}{u^2+v^2}\right) / (\log(u^2+v^2))^2 \\ \frac{1/v}{1+(u/v)^2} & \frac{-u/v^2}{1+(u/v)^2} \end{pmatrix}$$

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen}(y) \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$J_{f \circ g}(x,y) = J_f(g(x,y)) \, J_g(x,y)$$

$$J_{g \circ f}(u,v) = J_g(f(u,v)) \, J_f(u,v)$$

→ Ejercicio 15.

a. $f(x,y) = e^{x+y} + 2\operatorname{sen}(2x-y)$, $a = (0,0)$

$J_f(0,0) = \nabla f(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2\cos(2x-y) \cdot 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + 4 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} - 2\cos(2x-y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 - 2 = -1$$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (5,-1)$

b. $f(x,y,z) = (e^{z+x+y}, x+y+2z)$, $a = (0,1,2)$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{z+x+y} & e^{z+x+y} & e^{z+x+y} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow J_f(0,1,2) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c. $f(x,y) = \left(e^{x+y}, \operatorname{sen}(2x-y), \log(1+y^2)\right)$, $a = (\pi, \pi)$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ \cos(2x-y)2 & -\cos(2x-y) \\ 0 & \frac{2y}{1+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{2\pi} \\ -2 & 1 \\ 0 & \frac{2\pi}{1+\pi^2} \end{pmatrix}$$

d. $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^p$ fijo, $f(x) = Ax$, $A \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ y $x \in M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, es decir $f(x)$ es un vector en $\mathbb{R}^q$

$f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)) =$

$= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{q1}x_1 + \dots + a_{qp}x_p)$ si $A = (a_{ij})_{ij}$

$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij} \Rightarrow J_f(a) = A$

e. $f(x,y) = \langle g(x,y), h(x,y) \rangle$, $g, h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$

$\Rightarrow f(x,y) = g_1 h_1(x,y) + g_2 h_2(x,y)$

$\Rightarrow J_f(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) h_1(x,y) + g_1(x,y) \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) + \right.$

$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) h_2(x,y) + g_2(x,y) \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g_1}{\partial y} h_1 + g_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} h_2 +$

$\left. g_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)$