Ejercicio 7. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}(1/x) + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Continuidad:

En $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{(x^2+y^2)\,\underbrace{\text{sen}(1/x)}_{\text{acotado}}}^{\to 0} + \overbrace{e^{xy}}^{\to 1} = 1 = f(0,0) \Rightarrow$ es continua en $(0,0)$

En $(0,1)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\to 1}\,\underbrace{\text{sen}(1/x)}_{\text{oscila}} + \overbrace{e^{xy}}^{\to 1}$

Probemos que este límite no existe: poniendo $y=1$ tenemos

$$\lim_{x\to 0} (x^2+1)\,\text{sen}(1/x) + e^{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2\,\text{sen}(1/x)}_{\to 0} + \text{sen}(1/x) + \underbrace{e^{x}}_{\to 1}$$

$= 1 + \lim\limits_{x\to 0} \text{sen}(1/x)$ que no existe. $\Rightarrow$ no es continua en $(0,1)$

En $(1,0)$: es continua

Diferenciabilidad:

- En $x \neq 0$ las derivadas parciales existen y las podemos calcular así:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\text{sen}(1/x) + (x^2+y^2)\cos(1/x)(-1/x^2) + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\text{sen}(1/x) + xe^{xy}$$

Observamos que son continuas en $x \neq 0 \Rightarrow$ la función es diferenciable en $(1,0)$

Si $x=0$, calculamos las derivadas parciales con el cociente incremental

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+y^2)\,\mathrm{sen}(1/h) + e^{hy} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}(1/h) + \frac{y^2}{h}\mathrm{sen}(1/h) + \frac{e^{hy}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{h\,\mathrm{sen}(1/h)}_{0} + \frac{y^2}{h}\mathrm{sen}(1/h) + \frac{hy}{\cancel{y}}$$ → existe sii $y=0$

Es decir, la derivada parcial con respecto a x solo existe en $(0,0)$.

y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ existe $\forall y$.

Concluimos entonces que en $(0,1)$ la función NO es diferenciable.
Para ver si lo es en $(0,0)$, necesitamos estudiar

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(v_1,v_2)}{\|(v_1,v_2)\|}$$

Notar que si es diferenciable $\Rightarrow d_{(0,0)}f(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,v_2$

$= 0v_1 + 0v_2$

→ Obtenemos: $$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{(v_1^2+v_2^2)\,\mathrm{sen}(1/v_1) + e^{v_1v_2} - 1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,\mathrm{sen}(1/v_1)}_{\to 0} + \frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}^{*} = 0$$

$\Rightarrow$ la función es diferenciable en $(0,0)$.

* $v_1 = r\cos\theta$, $v_2 = r\,\text{sen}\theta$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\,\text{sen}\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta}} = \lim_{r\to 0^+} r\cos\theta\,\text{sen}\theta = 0$$

→ Ejercicio 9. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}$ si $x \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$

a. Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) = 2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) = 2y\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Por otro lado, en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

b. En $(x,y) \neq (0,0)$ las derivadas parciales son continuas $\Rightarrow$ f es diferenciable

En $(0,0)$:

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - \partial f/\partial x(0,0).v_1 - \partial f/\partial y(0,0).v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{(v_1^2+v_2^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{v_1^2+v_2^2}\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \sqrt{v_1^2+v_2^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{v_1^2+v_2^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ f es diferenciable en $(0,0)$

c. Alcanza ver que $\partial f/\partial x$ o $\partial f/\partial y$ No son continuas en un entorno de $(0,0)$

Sabemos que $\partial f/\partial x(0,0) = \partial f/\partial y(0,0) = 0$. Veamos qué pasa alrededor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\to 0} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

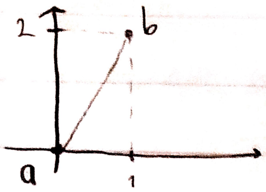
Acercándonos por $y=0$: $\lim_{x\to 0} -\frac{2x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

y este límite no existe.

→ **Ejercicio 10.** Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = x^3 y$, $a = (0,0)$, $b = (1,2)$.

Si ξ pertenece al segmento $[a,b] \Rightarrow \xi = bt + (1-t)a = (1,2)t + (1-t)(0,0)$

$\Rightarrow \xi = (t, 2t)$



Necesitamos $t \,/\, f(1,2) - f(0,0) = d_\xi f\,(1,2)$

Para calcular el diferencial, notar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) = 3t^2 . 2t = 6t^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi) = t^3$

$d_\xi f\,(1,2) = \langle \nabla_\xi f, (1,2) \rangle = \langle (6t^3, t^3), (1,2) \rangle$

$= 6t^3 + 2t^3 = 8t^3$

Por otro lado, $f(b) - f(a) = f(1,2) = 2$

$\to 2 = 8t^3 \to t^3 = \frac{1}{4} \to t = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \xi = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$

→ **Ejercicio 11.** Sea $f: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \,/\, f$ es diferenciable y

$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta) = (g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta))$

Usamos la regla de la cadena: $d_a(f \circ g) = d_{g(a)} f \, d_a g$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho,\theta)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta) . \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta)\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(\rho,\theta)) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(\rho,\theta)) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho,\theta)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta)(-\rho\,\text{sen}\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta)\,\rho\cos\theta .$$