PRÁCTICO 8: DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIABILIDAD

→ Ejercicio 1.

a. $f(x,y) = ax^{\alpha} + bx^{\beta}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\alpha x^{\alpha-1}$ → existe $\forall x$ si $\alpha \geq 1$

existe $\forall x \neq 0$ si $\alpha < 1$

h. $f(x,y) = \max\{x^2, y^3\} \Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x^2 \geq y^3 \\ y^3 & \text{si } x^2 < y^3 \end{cases}$

⇒ hay que estudiar las derivadas en $x^2 > y^3$ y $x^2 < y^3$

si $x^2 < y^3 \Rightarrow f(x,y) = y^3 \Rightarrow \partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 3y^2$

si $x^2 \geq y^3 \Rightarrow f(x,y) = x^2 \Rightarrow \partial f/\partial x = 2x$, $\partial f/\partial y = 0$

→ Ejercicio 2.

b. $f(x,y) = \log(xy)$. Notar que $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

c. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2+y^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 4x^2 + 2\cos(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\operatorname{sen}(x^2+y^2)\, 4y^2 + 2\cos(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen}(x^2+y^2)\, 2x\, 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

→ Ejercicio 3. $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}\, \operatorname{sen}(kx)$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-a^2k^2t}\right) \operatorname{sen}(kx) = -a^2k^2 t\, e^{-a^2k^2t}\, \operatorname{sen}(kx)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-a^2k^2t}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(kx)\right) = e^{-a^2k^2t} \cos(kx)\, k$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-a^2k^2t}\, \operatorname{sen}(kx)\, k^2$$

$$a^2 u_{xx} = -a^2k^2\, e^{-a^2k^2t}\, \operatorname{sen}(kx) = u_t$$

→ Ejercicio 4.

a. $f(x,y) = \begin{cases} (xy)/\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Claramente f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pues es cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.

Veamos qué pasa en $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$: pasemos a polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta}} = \lim\limits_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0^+} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Rightarrow f$ es continua sii $a = 0$.

En ese caso tiene sentido estudiar las derivadas direccionales

- En $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: Sea $(x,y)\neq(0,0)$ y calculemos las derivadas parciales de f ahí:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$

$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua en un entorno de (x,y)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ " y " " " " " " (x,y)

$\Rightarrow f$ es diferenciable en (x,y)

- En $(0,0)$: Sea $v \in \mathbb{R}^n$, supongamos $a=0$

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{tv_1\, tv_2}{t\sqrt{t^2v_1^2 + t^2v_2^2}} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2}{t|t|} \cdot \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \pm \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \Rightarrow$ sólo existe si $v_1 \cdot v_2 = 0$

Fuera del $(0,0)$, podemos calcular las derivadas parciales, observar que son continuas $\Rightarrow$ la función es diferenciable $\Rightarrow$ todas las derivadas direccionales existen

d. $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\text{sen}(1/x)\cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Para $xy \neq 0$, f es continua por ser producto de funciones continuas.

Veamos que pasa en $xy = 0$: sea $(x_0, y_0) / x_0 y_0 = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{xy}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\text{sen}(1/x)\cos(1/y)}_{\text{acotado}} = 0$$

$\Rightarrow f$ es continua sii $a = 0$

Si $xy \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\,\text{sen}(1/x)\right) y\cos(1/y) = \left(\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) y\cos(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\cos(1/y) + \text{sen}(1/y)\,1/y\right)$$

que son continuas en un entorno de $(x,y) / xy \neq 0$

- Ahora, si $x = 0$, $y \neq 0$: sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, y+tv_2) - f(0,y)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}v_1(y+tv_2)\,\text{sen}(1/tv_1)\cos(1/y+tv_2)}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} v_1 y \underbrace{\text{sen}(1/tv_1)\cos(1/y+tv_2)}_{\text{oscila}} + \overset{\nearrow 0}{v_1 t v_2} \underbrace{\text{sen}(1/tv_1)\cos(1/y+tv_2)}_{\text{acotado}}$$

$\Rightarrow$ el límite no existe a menos que $v_1 = 0$, o sea, solo existe para $v = (0, v_2)$

- si $x \neq 0$, $y = 0$, sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{(x+tv_1)\cancel{t}v_2\,\text{sen}(1/x+tv_1)\cos(1/tv_2)}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} xv_2\,\text{sen}(1/x+tv_1)\cos(1/tv_2) + \underbrace{tv_1v_2\,\text{sen}(1/x+tv_1)\cos(1/tv_2)}_{\searrow 0}$$

$\Rightarrow$ el límite no existe excepto para $v = (v_1, 0)$.

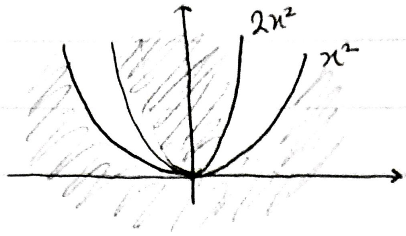
- si $x = y = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{tv_1 \cancel{t}v_2\,\text{sen}(1/tv_1)\cos(1/tv_2)}{\cancel{t}} = 0$

Fuera de $xy = 0$ tenemos la misma situación que en la parte anterior.

→ Ejercicio 6. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$

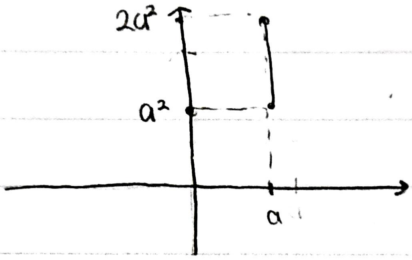
$C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = a\}$

Si $a = 0 \Rightarrow C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y\}$



Si $a < 0 \Rightarrow C_a = \emptyset$

si $a > 0 \Rightarrow C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, \ a^2 < y < 2a^2\}$



Tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta \,/\, |f(x,y)| < \varepsilon \ \forall (x,y) \,/$
$\|(x,y)\| < \delta$: alcanza tomar $\delta = \varepsilon$ pues en ese caso $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |x| < \delta = \varepsilon$

Sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0 \,/\, f(tv_1, tv_2) = 0 \ \forall |t| < \delta$ $*$

como $t \in \mathbb{R}$, supongamos $v_2 \geq 0$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0$$ (debajo del eje x la función vale 0)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0 \quad \text{por } *$$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$

Para ser diferenciable debe existir una transformación lineal $d_{(0,0)} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/$

$$\lim_{v \to 0} \frac{f((0,0) + v) - f(0,0) - d_{(0,0)} f(v)}{\|v\|}$$

Pero $d_{(0,0)} f = \partial f/\partial x (0,0) \cdot x + \partial f/\partial y (0,0) \cdot y = 0$

$\Rightarrow$ Dado $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(v_1,v_2) \to (0,0)} \frac{f(v_1, v_2) - f(0,0) - d_{(0,0)} f(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|} = \lim_{(v_1,v_2) \to (0,0)} \frac{f(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

y este límite no da 0: basta acercarnos por una curva que quede encerrada entre x^2 y $2x^2$, por ejemplo $\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow v = (v_1, \frac{3}{2}v_1^2)$

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{f(v_1, \frac{3}{2}v_1^2)}{\sqrt{v_1^2 + \frac{9}{4}v_1^2}} = \lim_{v_1 \to 0} \frac{|v_1|}{|v_1|\sqrt{1+9/4}} = \frac{1}{\sqrt{1+9/4}} \neq 0.$$