→ Ejercicio 11.

a. $f(x,y) = \begin{cases} 4x^2y^3/(4x^2+y^6) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

como $4x^2+y^6 > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$, el único problema podría estar en $(0,0)$.

Sabemos que $f(0,0) = 0$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y^3}{4x^2+y^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^3 \cdot \underbrace{\frac{4x^2}{4x^2+y6}}_{\text{acotado } *} = 0$$

$* \quad \dfrac{4x^2}{4x^2+y^6} \leq 1$ pues $4x^2 \leq 4x^2+y6 \Leftrightarrow y^6 \geq 0$ ✓

→ Ejercicio 11.

c. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Estudiamos los límites laterales en $(0,y)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x,y) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 2y - 1 = 2y - 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x,y) = \lim_{x \to 0^-} 3x + y^2 = y^2$$

Como f es polinomial, f es continua siempre que $x \neq 0$. Para que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$, pedimos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x,y) = \lim_{x \to 0^-} f(x,y)$$

Y esto ocurre sii $2y - 1 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$. Es decir, f es continua en $(0,1)$ pero no en $(0,y)$ $\forall y \neq 1$, o sea, en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \neq 1\}$.

→ Ejercicio 12.

a. tenemos que f no está definida en $(x,y) = (0,0)$. Sin embargo, usando que $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$, concluimos que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

$\Rightarrow$ definiendo $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2+y^2)/x^2+y^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

obtenemos una función continua en $\mathbb{R}^2$

→ Ejercicio 12. b) $f(x,y) = x^2 \log(x^2+y^2)$

Tenemos problema en $(x,y)=(0,0)$. Cambiemos a coordenadas polares.

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$;

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = r^2\cos^2\theta \log(r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta) = r^2\cos^2\theta \log(r^2)$$
$$= r^2\log(r^2) \cdot \cos\theta.$$

Si definimos $h(r) = r^2\log(r^2)$, $k(\theta) = \cos\theta$, tenemos que k es una función acotada en un entorno de $(0,0)$ (de hecho en todo $\mathbb{R}^2$) y $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \lim\limits_{r\to 0} r^2\log(r^2) = 0$

$\Rightarrow$ usando el ejercicio 4. e), $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

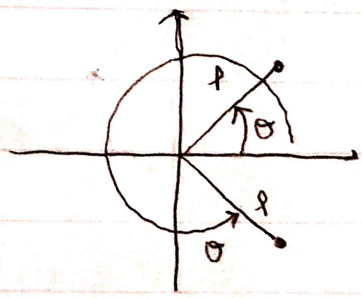
$\rightarrow$ alcanza extender a f de la siguiente forma

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\log(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

→ Ejercicio 14. Sea $f: (0,+\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ / $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$

a. Como $f(\rho,\theta) = (f_1(\rho,\theta), f_2(\rho,\theta))$, $f_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$, $f_2(\rho,\theta) = \rho\,\text{sen}\,\theta$ y ambas son continuas, f es continua.

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \rho,\theta$ / $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ pues: podemos definir $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arg(x,y)$ de la siguiente forma.



si $x>0$, $y \geq 0$, $\theta = \text{Arctg}(y/x)$

si $x>0$, $y<0$, $\theta = \text{Arctg}(y/x) + 2\pi$

si $x=0$, $y>0$, $\theta = \pi/2$

si $x=0$, $y<0$, $\theta = 3\pi/2$

si $x<0$, $\theta = \text{Arctg}(y/x) + \pi$

$\rightarrow (x,y) = f(\rho(x,y), \arg(x,y))$

Además, si $f(\rho,\theta) = f(\rho',\theta') \Rightarrow (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = (\rho'\cos\theta', \rho'\,\text{sen}\,\theta')$

Como $\left.\begin{array}{l}\|(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)\| = \rho \\ \|(\rho'\cos\theta', \rho'\,\text{sen}\,\theta')\| = \rho'\end{array}\right\} \rho = \rho'$

$\Rightarrow (\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = (\cos\theta', \text{sen}\,\theta') \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \cos\theta' \Rightarrow \theta' = \theta \text{ o } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pues } \theta,\theta' \in [0,2\pi)}}{-\theta+2\pi}, \theta \neq 0,\pi \\ \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta'\end{array}\right.$

si $\theta' = -\theta+2\pi \Rightarrow \text{sen}\,\theta' = \text{sen}(-\theta+2\pi) = \text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ y no cumple la segunda ecuación a menos que $\theta = 0$ ✗ o $\theta = \pi$ ✗

$\rightarrow$ el sistema tiene solución si $\theta = \theta' \Rightarrow f$ es inyectiva

b. Fijando $\rho = \rho_0$ constante, $f(\rho_0,\theta) = (\rho_0\cos\theta, \rho_0\,\text{sen}\,\theta) = \{$circunferencia de radio ρ_0 y centro $(0,0)\}$ pues θ es libre

Fijando $\theta = \theta_0$ constante, $f(\rho,\theta_0) = (\rho\cos\theta_0, \rho\,\text{sen}\,\theta_0)$ estamos fijando una dirección y pasando por todos los puntos a distancia $\rho \in \mathbb{R}^+$ de $(0,0)$, o sea, es una semirecta por el origen con inclinación θ_0

c. $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (0,+\infty) \times [0,2\pi)$: $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = (x,y)$

$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arg(x,y)$ (donde $\arg(x,y)$ es como lo definimos en la parte a))

Si $f^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y))$ entonces f^{-1} es efectivamente la inversa de f pues por parte a) $f(f^{-1}(x,y)) = f(\rho(x,y), \arg(x,y)) = (x,y)$

Además, $f^{-1}(f(\rho,\theta)) = f^{-1}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = (\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta}, \arg(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta))$
$= (\rho, \text{arctg}(\rho\,\text{sen}\,\theta / \rho\cos\theta)) = (\rho, \text{arctg}(\text{tg}\,\theta)) = (\rho,\theta)$ (esto es si $(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$ está en el primer cuadrante; si no, hay que usar las otras fórmulas (CORROBORAR)

Claramente $\rho(x,y)$ es continua. Por otro lado, $\arg(x,y)$ tiene problema en $x=0$ y en $y=0$:

En $x=0$: si $y>0$, $\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x,y) = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x^2+y^2}, \text{Arctg}(y/x)) = (y, \pi/2)$

$$\lim_{x\to 0^-} f^{-1}(x,y) = \lim_{x\to 0^-} (\sqrt{x^2+y^2}, \overbrace{\text{Arctg}(y/x)}^{\to -\pi/2}+\pi) = (y, \pi/2)$$

Es análogo para $y<0 \Rightarrow f^{-1}$ es continua en $x=0$

Sin embargo en $y=0, x>0$ no lo es:

$$\lim_{y \to 0^+} f^{-1}(x,y) = \lim_{y \to 0^+} \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctg}(y/x)\right) = (x,0)$$

$$\lim_{y \to 0^-} f^{-1}(x,y) = \lim_{y \to 0^-} \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctg}(y/x) + 2\pi\right) = (x,2\pi)$$

→ Ejercicio 15.

a. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y $A \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Dado $x \in f^{-1}(A)$, $f(x) \in A$ y como A abierto, $\exists B_r(f(x)) \subset A$. Como f es continua, $\exists \delta > 0 /$ $f(B_\delta(x)) \subset B_r(f(x)) \Rightarrow x \in B_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$

Si $f^{-1}(A)$ es abierto $\forall A$ abierto $\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ es abierto $\Rightarrow$ dado $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, $\exists \delta > 0 / B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$

b. Alcanza usar la parte anterior tomando complementos

c. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^3 < 4,\ y^2 + z^3 > 2\}$.

Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid$ $f(x) = x^2 + y^3$
$g(x) = y^2 + z^3$

El conjunto $A_f = \{f(x) < 4\} = (-\infty, 4)$ es abierto en $\mathbb{R}$
El conjunto $A_g = \{g(x) > 2\} = (2, +\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$

Ambas funciones son continuas $\Rightarrow$ $f^{-1}(A_f)$ y $f^{-1}(A_g)$ son abiertos en $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(A_f) \cap f^{-1}(A_g) = A$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.