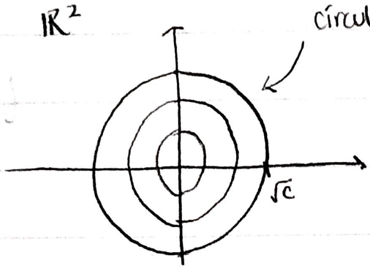
PRÁCTICO 7.

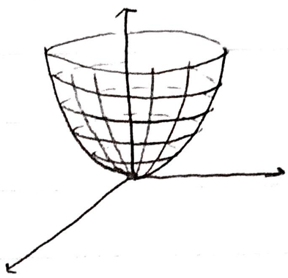
→ Ejercicio 1. a. $f(x,y) = x^2+y^2$

Dominio $f = \mathbb{R}^2$

Para estudiar los conjuntos de nivel tomamos $c \in \mathbb{R}$. Si $c<0 \Rightarrow \{f(x,y)=c\} = \{x^2+y^2=c\} = \phi$. Si $c=0 \Rightarrow \{f(x,y)=0\} = (0,0)$ y si $c>0$, $\{f(x,y)=c\}$ es una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{c}$. A partir de esto, se ve que la gráfica de f es un paraboloide

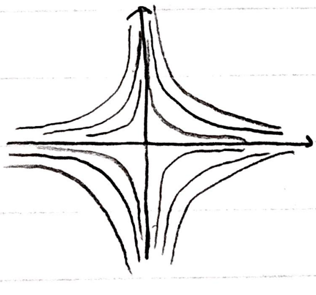
círculos concéntricos que se agrandan/achican según c.



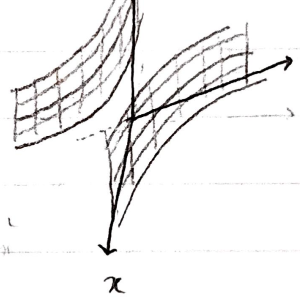


e. $f(x,y) = xy$.

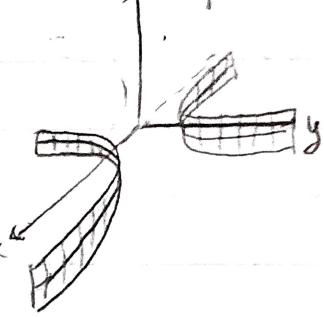
El dominio de f es $(\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\} \cup \{x=0\}) \cup \{y=z=0\} \cup \{x=z=0\}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{xy=a\} = \{y = a/x\}$



para $a>0$

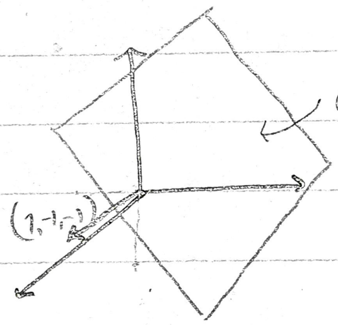


para $a<0$



→ Ejercicio 2.

a. $f(x,y,z) = \frac{x}{x-y-z}$ → $Dom(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{x-y-z=0\}$



acá f no está definida: plano por el origen y normal $\vec{n} = (1,-1,-1)$

para $(x,y,z) \in Dom(f)$, $f(x,y,z) = a \Leftrightarrow \frac{x}{x-y-z} = a \Leftrightarrow x = ax - ay - az$

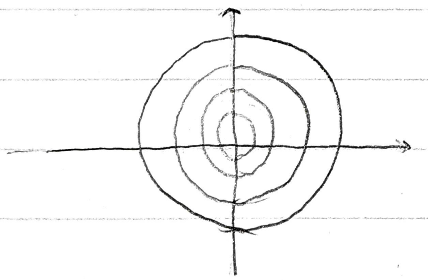
$\Leftrightarrow x(1-a) + ay + az = 0$ → plano por el origen y normal $\vec{n} = (1-a, a, a)$

→ Ejercicio 3.

b. $\log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \to$ dominio : $\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ (1-x^2-y^2)/(x^2+y^2)>0 \end{cases} \Rightarrow 1-x^2-y^2>$

$C_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 = e^a(x^2+y^2)\} = \{x^2(e^a+1)+y^2(e^a+1)=1\}$

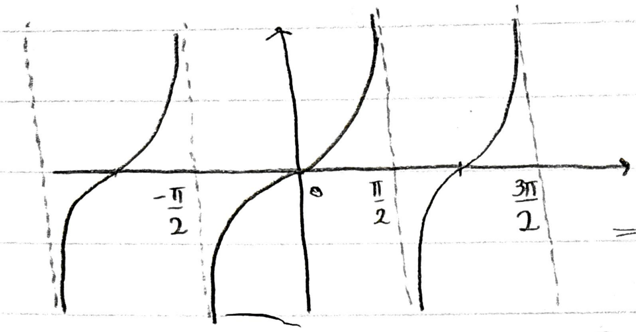
$= \{x^2+y^2 = 1/(e^a+1)\}$



si $a \to -\infty \Rightarrow C_a \to \{x^2+y^2=1\}$

si $a \geq 0$, C_a es un círculo contenido en $x^2+y^2=1$

Ejercicio 3. f. $f(x,y) = \text{arctg}(x^2/y)$. Sabemos que arctg está definida solo en $(-\pi/2, \pi/2)$ pero la podemos extender a $\mathbb{R}$ así:



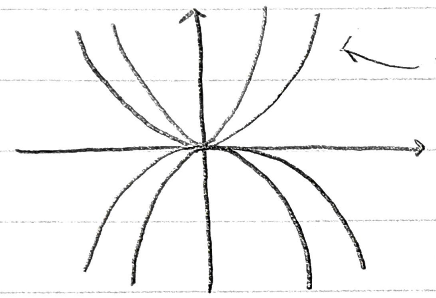
$\Rightarrow$ no está definida en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Además, x^2/y no está definida en $y=0$

$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ x^2/y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\}$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ y = \frac{x^2}{n\pi + \pi/2}\right\}$$

Dom(f)



$\leftarrow$ no existe en esas curvas.

Conjuntos de nivel: si $a=0 \Rightarrow \text{arctg}(x^2/y) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2/y = n\pi \end{cases}$ (notar que arctg repite valores cada $n\pi$)

$\Rightarrow C_0 = \{(x,y) : x=0\} \cup \{(x,y) : y = x^2/n\pi\} \leftarrow$ parábolas

Si $a \neq 0 \Rightarrow \text{arctg}(x^2/y) = a \Leftrightarrow x^2/y = \text{arctg}(a) + n\pi$

$\Rightarrow C_a = \left\{(x,y) : y = \frac{x^2}{\text{arctg}(a) + n\pi}\right\} \leftarrow$ parábolas.

→ Ejercicio 4. $f: B_R^*((0,0)) \to \mathbb{R}$, $g: (0,R) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R} / g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)$

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 /$ si $(x,y) \in B_\delta(0,0) \Rightarrow f(x,y) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Si $(x,y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) \Rightarrow$ que $(x,y) \in B_\delta(0,0)$ es equivalente a que $|(x,y)| < \delta$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Leftrightarrow \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta} < \delta \Leftrightarrow r\sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} < \delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r < \delta$ ∴ O sea, $(x,y) \in B_\delta(0,0) \Leftrightarrow r < \delta$, $\theta \in [0,2\pi) \Leftrightarrow (r,\theta) \in (0,\delta) \times [0,2\pi)$

b. Sea $\theta \in [0,2\pi)$. $\forall r<\delta \Rightarrow |g(r,\theta) - L| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = L$
↳ La diferencia con la parte anterior es que estoy viendo a g como una función de una variable, restringiéndola a una dirección (θ fijo) y acercándome por ella. En la parte anterior me acerco por todas las direcciones (es mucho más fuerte).

c. i. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?: $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta}} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0} \cos\theta$ que no existe

ii. $f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?: $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\,\text{sen}\theta}{r\cos\theta} = \lim\limits_{r\to 0} \text{tg}\theta$ que no existe → para $x\neq 0$, o sea, si $\cos\theta \neq 0 \Leftrightarrow \pi/2, 3\pi/2$

Si $x=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

En conclusión, el límite no existe

iii. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \to g(r,\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<\text{sen}\theta< r\cos^2\theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Si $\text{sen}\theta > 0$, como $\exists R / r\cos^2\theta < \text{sen}\theta \ \forall r<R$, $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$
Si $\text{sen}\theta \leq 0$, estamos en la situación en que
$g(r,\theta) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$

Sin embargo, si $(x,y)=\left(x,\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow f(x,y)=1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \\ \text{Pero si } (x,y)=(x,0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el límite no existe}$$

d. Un contraejemplo es la función de la parte anterior

e. $g(r,\theta)=h(r)k(\theta)$, $h:(0,R)\to\mathbb{R}$, $k:[0,2\pi)\to\mathbb{R}$, k acotada y $\lim\limits_{r\to 0^+} h(r)=0$

Queremos ver que $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 /$ si $(x,y)\in B_\delta(0,0) \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$.
Sea $\varepsilon>0$. Como $h(r)\to 0, r\to 0$, si $\varepsilon'=\varepsilon/\max\{|k(\theta)|\}$, $\exists \delta /$ si $r<\delta \Rightarrow |h(r)|<\varepsilon'$

$\Rightarrow \forall (r,\theta)\in(0,\delta)\times[0,2\pi)$, $|g(r,\theta)|=|h(r)k(\theta)|=|h(r)||k(\theta)|<\varepsilon'|k(\theta)|=\varepsilon$

$\Rightarrow$ por parte a), $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

f. i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Sea $g(r,\theta)=\frac{r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta} = r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$

$=h(r)k(\theta)$, $h(r)=r$, $k(\theta)=\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta \to k$ acotada y $\lim\limits_{r\to 0} h(r)=\lim\limits_{r\to 0} r=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(r,\theta)=\frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta}} = r\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

→ Ejercicio 7.

b. $$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x^2+e^y-z)}^{\operatorname{sen}(1)}}{\underbrace{x^2}_{1}+\tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(1)}{1+\operatorname{tg}(1)}$$

c. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4-x^4}{3x^4} = 0$$

$$\lim_{\substack{x,y=0\\ z\to 0}} -\frac{z^4}{z^4} = -1$$