→ Ejercicio 5. $A,B \subset \mathbb{R}^n$ y $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$

a. Sea $x\in A+B \Rightarrow x=a+b$, $a\in A, b\in B$. Como A abierto, $\exists r>0 / B(a,r)\subset A$

Trasladando esa bola por b, tenemos $B(x,r)$. Ahora, si $y\in B(a,r) \Rightarrow |a-y|<r$

$\Rightarrow y+b\in B(x,r)$ pues $|x-(y+b)| = |a+b-(y+b)| = |a-y|<r$

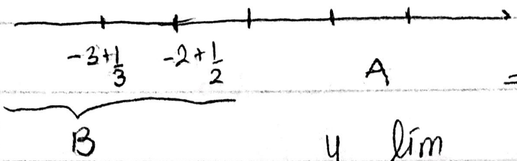
$\Rightarrow B(x,r) = \{y+b : y\in A, |a-y|<r\} \subset A+B$.

b. Tenemos que ver el caso en que A,B cerrados.

Un ejemplo fácil es pensar en dos sucesiones e intentar que en la suma haya una sucesión cuyo límite no esté en $A+B$.

Si $A=\{n : n\geq 1\}$

$B=\{-n+1/n : n\geq 2\}$ → para que no tenga al 0. la suma



$\Rightarrow a_n = n + (-n+1/n) = 1/n \in A+B$

y $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \notin A+B$.

→ Ejercicio 6.

a. ($\Rightarrow$) Si A es abierto $\Rightarrow \forall x \in A, \exists r>0 / B(x,r) \subset A$. Sea $x \in \partial A$ $\Rightarrow \forall r>0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow \nexists r>0 / B(x,r) \subset A \Rightarrow x \notin A$

($\Leftarrow$) Si $A \cap \partial A = \emptyset \Rightarrow \nexists x \in A / B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \ \forall r \Rightarrow \forall x \in A, \exists r>0 /$ $B(x,r) \subset A \Rightarrow A$ es abierto.

b. Quiero ver que $int(A) = \bigcup_{\substack{\mathcal{U} \subset A \\ \mathcal{U} \text{ abierto}}} \mathcal{U}$. Como $int(A) = \bar{A} - \partial A = \{x \in A :$ $\exists r>0 / B(x,r) \cap A^c = \emptyset\} = \{x \in A : \exists r>0 / B(x,r) \subset A\}$

Claramente, si $\mathcal{U} \subset A$ y $x \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ abierto, $\exists r>0 / B(x,r) \subset \mathcal{U} \subset A$ $\rightarrow x \in \bar{A} - \partial A$ y tenemos esta inclusión: $int(A) \supset \bigcup_{\substack{\mathcal{U} \subset A \\ \mathcal{U} \text{ abierto}}} \mathcal{U}$

Ahora, si $x \in int(A)$, sabemos que $\exists r>0 / B(x,r) \subset A$, pero $B(x,r)$ es abierto $\Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{\mathcal{U} \subset A \\ \mathcal{U} \text{ abierto}}} \mathcal{U}$.

c. Veamos que A es cerrado $\Leftrightarrow \partial A \subset A$.

Si A cerrado $\Rightarrow A^c$ abierto $\Leftrightarrow \forall x \in A^c, \exists r>0 / B(x,r) \subset A^c$ $\Leftrightarrow B(x,r) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow$ dado $x \in A^c$, $x \notin \partial A \Leftrightarrow \partial A \subset A$.

d. Por parte anterior y definición de $\bar{A}$, tenemos que $\partial \bar{A} \subset \partial A \subset \bar{A}$ ($\partial \bar{A} = \partial(A \cup \partial A)$)
$\Rightarrow \bar{A}$ es cerrado.

Falta ver que $\bar{A} = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ \text{cerrado}}} C$. Sea $x \in \bigcap C \Rightarrow x \in C \ \forall C$ cerrado, $C \supset A$ en particular, como $A \subset \bar{A}$, $x \in \bar{A}$. Ahora, si C cerrado, $C \supset A$, tenemos que $\bar{A} \subset \bar{C} = C \Rightarrow \bar{A} \subset \bigcap C$

e. Sea $x \in A'^c \Rightarrow \exists r>0 / B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \subset (A \setminus \{x\})^c$ $= (A \cap \{x\}^c)^c = A^c \cup \{x\} \Rightarrow$ los puntos de $B(x,r)$ son todos de $A^c \Rightarrow$ $B(x,r) \subset A'^c$.

→ Ejercicio 7

a. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos abiertos y $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

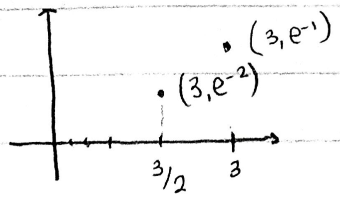
Dado $x \in U$, $\exists \alpha / x \in U_\alpha$ y como U_α es abierto, $\exists r > 0 / B(x,r) \subset U_\alpha$
$\Rightarrow B(x,r) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

b. Sean $U_1, \dots, U_n$ abiertos y $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Sea $x \in U \Rightarrow x \in U_i \ \forall i = 1, \dots, n$.
Para cada i, $\exists r_i / B(x, r_i) \subset U_i$. Tomando $r = \min\{r_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
tenemos que $B(x,r) \subset U_i \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.

c. No, alcanza tomar $U_n = (-1/n, 1)$, pues $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0,1)$ que no es abierto.

d. Tomando complementos, tenemos que la unión finita de cerrados es cerrada y la intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

→ Ejercicio 8.



- $a_n = (e^{-n}, 3/n)$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 3/n = 0$ $\Big\}$ a_n converge a $(0,0)$

- $b_n = (e^{-n}+2, [1+(-1)^n]n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}+2 = 2$ pero $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} [1+(-1)^n]n$. Sin embargo, para n par, $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$ y para n impar, vale $0 \Rightarrow b_n$ no converge pero tiene subsucesiones convergentes a $(2,0)$

- $c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right)$, tampoco converge pero para n par, $c_n \to (1,1)$ y para n impar $c_n \to (-1,-1)$

- $d_n = \left(n((-1)^n+1), e\right)$. No converge pero, si n par d_n diverge y si n impar, $d_n \to (0,e)$

→ Ejemplo 9.

a. Sea $x_n \subset \mathbb{R}^n$ / $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. y sea x_{n_k} una subsucesión.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N / \forall n > N$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Como $n_k \nearrow$, $\exists k_0 / n_k > N$ $\forall k > k_0$

$\Rightarrow$ para ese n_{k_0}, tenemos $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$ $\forall n_k > n_{k_0}$ $\forall \varepsilon$

$\Rightarrow$ $x_{n_k} \to x$.

b. Sea $x_n \subset \mathbb{R}^2$ / $x_n \to p$ y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Como $\{x_n\}$ es un conjunto discreto en $\mathbb{R}^2$, $\mathring{A} = \emptyset$. Además, $\forall \varepsilon>0$, $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ por ser el límite $\Rightarrow p \in \partial A \Rightarrow \partial A = A \cup \{p\}$ y como $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup \{p\}$.
Por último, si $\# A = \infty \Rightarrow \forall r>0$, $B(p,r) \cap A - \{p\} \neq \emptyset \Rightarrow A' = \{p\}$ pero si A es finito, $\exists r>0 / B(p,r) \cap A - \{p\} = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$

c. $a \in X'$ sii $\exists \{x_k\} \subset X - \{a\} / x_k \to a$.

Si a es de acumulación $\Rightarrow \forall r$, $B(a,r)^* \cap X \neq \emptyset \Rightarrow$ considerando $r = 1/n$, $\forall n$ elijo $x_n \in B(a, 1/n)^*$ y esta sucesión converge a a por definición.

Si $\exists \{x_k\} \subset X - \{a\} / x_k \to a \Rightarrow \forall r>0$, $\exists K / x_k \in B(a,r)$ $\forall k > K$
$\Rightarrow B(a,r)^* \cap X \neq \emptyset$ $\forall r \Rightarrow a \in X'$