PRÁCTICO 6: TOPOLOGÍA EN $\mathbb{R}^n$

→ Ejercicio 1.

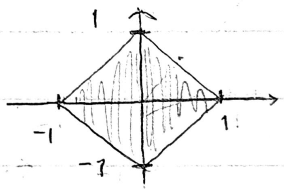
a. i. $N(x,y) = |x| + |y|$ ambos términos ≥ 0

- $N(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = 0$
- Si $u = (x,y) \Rightarrow \lambda u = (\lambda x, \lambda y) \Rightarrow N(\lambda u) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||y|$
$= |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| N(x,y) = |\lambda| N(u)$
- Si $u = (x,y)$, $v = (x',y') \Rightarrow N(u+v) = N((x+x', y+y')) = |x+x'| + |y+y'|$
$\leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = (|x| + |y|) + (|x'| + |y'|) = N(u) + N(v)$

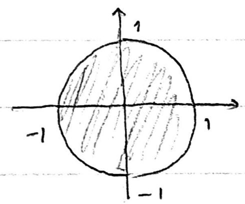
$\Rightarrow$ es una norma

b. $N_1(x,y) = |x| + |y|$ es norma, En $\mathbb{R}^2$ la bola de centro $(0,0)$ y radio 1 es:

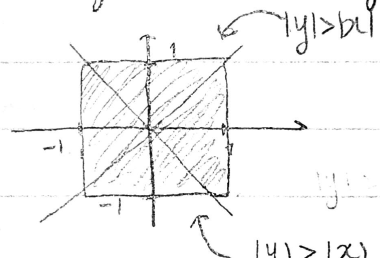
$|x| = 1 - |y|$



$N_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



$N_3(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$



c. $N_1 \sim N_3 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \,/\, \alpha N_1(x,y) \leq N_3(x,y) \leq \beta N_1(x,y)$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \,/\, \begin{cases} \alpha(|x| + |y|) \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} & ① \\ \beta(|x| + |y|) \geq \text{máx}\{|x|, |y|\} \end{cases}$$

Supongamos que $|x| > |y| \Rightarrow$ ① es equivalente a que $\exists \alpha / \alpha|x| + \alpha|y| \leq |x|$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{|x|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

y ② es equivalente a $\beta(|x| + |y|) \geq |x|$ y alcanza tomar $\beta = 1$ pues $|x| \leq |x| + |y|$.

$N_2 \sim N_3 \Leftrightarrow \alpha N_2(x,y) \leq N_3(x,y) \leq \beta N_2(x,y)$

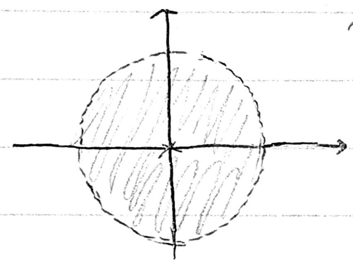
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} = |x| \\ \beta\sqrt{x^2 + y^2} \geq \text{máx}\{|x|, |y|\} = |x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{x^2+y^2} \leq \alpha\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,\alpha|x| \leq |x| \Leftarrow \alpha \leq 1/2 \\ \beta\sqrt{x^2+y^2} \geq \beta\sqrt{x^2} = \beta|x| \geq |x| \Leftarrow \beta \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow N_1 \sim N_3 \sim N_2$

→ Ejercicio 2.

– $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ (x,y)\neq(0,0)\}$, $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$

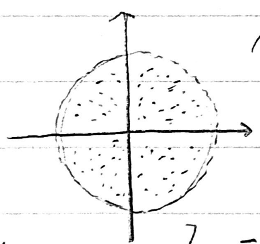


Está acotado pues está contenido en $B(0,1)$ (o cualquier otra $B(0,r)$, $r>1$).
Como $B(0,1)$ es abierto, sacarle un punto del interior no cambia esta propiedad (pues $(B(0,1)-\{(0,0)\})^c = B(0,1)^c \cup \{(0,0)\}$ que es cerrado)

$\mathring{A}_3 = A_3$ por ser abierto.
$\partial A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$
$\overline{A_3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

Como es acotado pero no cerrado, No es compacto.

Ahora, $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$

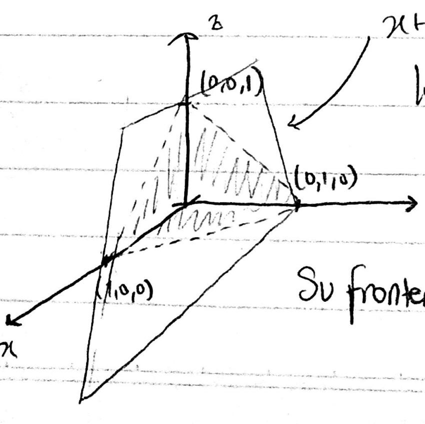


Sigue estando acotado ($C \subset B(0,1)$)
Pero ya no es abierto ni cerrado pues $\mathbb{Q}^2$ no lo es, de hecho, $\forall p \in C$, y $\forall B(p,r)$, $\exists x \in \mathbb{Q}^c / x \in B(p,r)$
$\Rightarrow \nexists B(p,r) \subset C$. Análogamente, el complemento no es abierto.

$\mathring{C} = \emptyset$
$\partial C = A_3$
$\overline{C} = \overline{A_3}$

No es compacto

– $A_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$



$x+y+z=1$, queda un ktraedro delimitado por los ejes y los tres segmentos entre $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$ y $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ $\Rightarrow$ acotado ($A_6 \subset B(0,1)$). Es abierto $\Rightarrow \mathring{A}_3 = A_3$.
Su frontera son los triángulos que delimitan T_1, T_2, T_3, T_4

$T_1 = \{(x,y,z) : x=0,\ y,z \geq 0,\ z \leq 1-y\}$

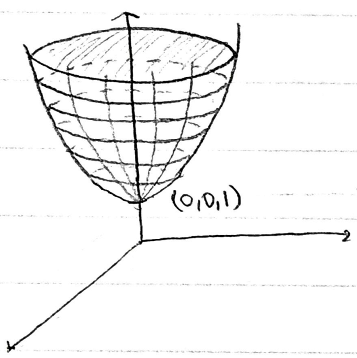
$T_2 = \{(x,y,z) : z=0,\ x,y \geq 0,\ y \leq 1-x\}$

$T_3 = \{(x,y,z) : y=0,\ x,z \geq 0,\ z \leq 1-x\}$

$T_4 = \{(x,y,z) : x+y+z=1,\ x,y,z \geq 0\}$

– $A_7 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z+1\}$

Sabemos que $x^2+y^2=z$ es un paraboloide con base en $(0,0,0)$. Ahora lo trasladamos a $(0,0,1)$ y lo rellenamos



No está acotado porque $z \in [1,+\infty)$

Su interior es $\{(x,y,z) : x^2+y^2 < z+1\} = \mathring{A}_7$

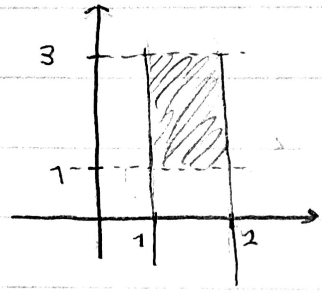
$\partial A_7 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z+1\}$

$\overline{A_7} = A_7$

$\Rightarrow A_7$ es cerrado pero no compacto.

Ejercicio 2.

- $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2,\ 1<y<3\}$



A_1 está acotado pues $A_1 \subset B(0,4)$

$\mathring{A}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2,\ 1<y<3\}$

$\partial A_1 = \{(x,1) : x\in[1,2]\}\cup\{(x,3) : x\in[1,2]\}$
$\cup\{(1,y) : y\in[1,3]\}\cup\{(2,y) : y\in[1,3]\}$

$\bar{A}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2,\ 1\leq y\leq 3\}$

$A_1' = \bar{A}_1$

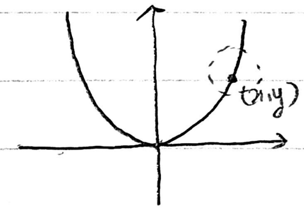
Como $A_1 \neq \bar{A}_1$ y $A_1 \neq \mathring{A}_1$, A_1 no es cerrado ni abierto $\Rightarrow$ no es compacto.

- $B = A_1\cap\mathbb{Q}^2$. Como $B\subset A_1$, B acotado.

$\mathring{B} = \emptyset$, $\partial B = \bar{A}_1$, $\bar{B} = \mathring{B}\cup\partial B = \partial B$, $B' = \bar{B} = \bar{A}_1$

Como $B \neq \mathring{B}, \bar{B}$, B no es cerrado ni abierto $\Rightarrow$ no es compacto.

- $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

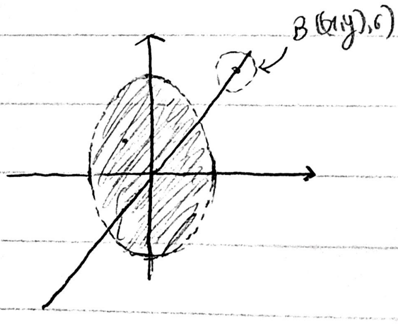


A_2 no está acotado ya que $\forall r>0, \exists (x,y) / (x,y)\notin B(0,r)$ (Alcanza tomar $(x,y) / \sqrt{x^2+y^2} > r$).

$\mathring{A}_2 = \emptyset$ pues $\forall (x,y)\in A_2$, $B((x,y),r)\cap A^c \neq \emptyset\ \forall r$

$\Rightarrow \partial A_2 = A_2 \Rightarrow \bar{A}_2 = A_2$, $A_2' = A_2 \Rightarrow A_2$ cerrado y no compacto

- $A_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$



A_4 no está acotado pues $\{x=y\}$ no lo está

$\mathring{A}_4 = \{2x^2+y^2<1\}$.

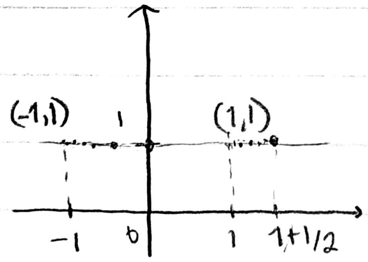
$\partial A_4 = \{2x^2+y^2=1\}\cup\{x=y\}$

$\bar{A}_4 = \{2x^2+y^2\leq 1\}\cup\{x=y\}$

$A_4' = \bar{A}_4$.

Como $A_4 \neq \mathring{A}_4, \bar{A}_4 \Rightarrow A_4$ no es cerrado ni abierto $\Rightarrow$ no es compacto.

- $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + 1/n,\ y = 1,\ n \geq 1\}$



para $n = 2k$, $(-1)^{2k} + \frac{1}{2k} \longrightarrow 1$ y $(1,1) \notin A_5$

para $n = 2k+1$, $(-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} \longrightarrow (-1,1) \notin A_5$

Como $A_5 \subset [-1, 1+1/2] \times \{1\}$ está acotado.

$\mathring{A}_5 = \emptyset$

Ademas, $\forall r > 0$, $\exists n / (-1)^n + 1/n \in B((1,1), r) \Rightarrow (1,1) \in \partial A_5$

y lo mismo para $(-1,1) \in \partial A_5 \Rightarrow \partial A_5 = A_5 \cup \{(-1,1), (1,1)\}$

$\bar{A}_5 = \partial A_5$

$A_5' = \{(-1,1), (1,1)\}$ pues los otros son puntos aislados.

Por lo tanto, A_5 no es abierto ni cerrado $\Rightarrow$ no es compacto.