PRÁCTICO 5: INTEGRALES IMPROPIAS

→ **Definición 3.1.** Sea $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ continua y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si $\exists \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$ definimos que la integral impropia $\int_a^\infty f(t)dt$ es CONVERGENTE A ESE VALOR

→ **Proposición 3.6.** Sean $f, g \mid a \leq f(t) \leq g(t)$ $\forall t > a$, Entonces

- Si $\int_a^\infty g(t)dt < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(t)\,dt < \infty$
- Si $\int_a^\infty f(t)\,dt = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(t)dt = \infty$

→ **Proposición** Sean $f, g \geq 0 \mid \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0 \Rightarrow \int_a^\infty f, \int_a^\infty g$ son de la misma clase.

→ **Ejercicio 1.**

a. Sean $a > 0$ y $f: [a,\infty) \to \mathbb{R} \mid f(t) \geq 0$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ usando el TFC y $f(x) \geq 0$ $\forall x \Rightarrow F' \geq 0$ y F es creciente

Tenemos que $\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x)$

Si $\lim_{x\to\infty} F(x) = L < \infty \Rightarrow$ Como F creciente, $F(x) \leq L$ $\forall x \Rightarrow \int_0^\infty f(t)dt < \infty$

$\Leftarrow$ F acotada

Si F acotada por $L \overset{=\sup(F)}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a,\infty) / F(x_0) \in (L-\varepsilon, L]$ y F es creciente

$\Rightarrow \forall x \geq x_0, F(x) \in (L-\varepsilon, L] \Rightarrow$ tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 / \forall x \geq x_0, |F(x) - L| < \varepsilon$

Ejercicio 2.

a. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^\alpha} dx \underset{\substack{u(x)=\log(x) \\ du = \frac{1}{x}dx}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha} = \int_2^{+\infty} u^{-\alpha} du$ y

Converge sii $\alpha > 1$

b. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \to \int_0^a x^2 . e^{-x^2} . x \, dx \underset{\substack{u = x^2 \\ du = 2x dx}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}} u e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u}(u+1) \Big|_0^{\sqrt{a}}$

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}(x^2+1) \Big|_0^a$

$= -\frac{1}{2} e^{-a^2}(a^2+1) + \frac{1}{2} . e^0 . 1 \Rightarrow \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}(a^2+1)\right) = \frac{1}{2}$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{e^{-x}+e^x} = f(x) \Rightarrow f$ es par

$\to$ Sea $F(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt = 2\int_0^x \frac{1}{e^t+e^{-t}} dt \underset{\substack{u = e^t \\ du = e^t dt}}{\overset{\uparrow}{=}} 2\int_1^{e^x} \frac{1}{u+u^{-1}} \frac{du}{u}$

$= 2\int_1^{e^x} \frac{1}{u^2+1} du = 2\left(\operatorname{Arctg}(e^x) - \operatorname{Arctg}(1)\right)$

$\to \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} 2.\left(\operatorname{Arctg}(e^x) - \frac{\pi}{4}\right) = 2.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

→ Ejercicio 3 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}\right)dx$, si $f(x) = \frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}$,

$f(x) = \frac{x^2+x-2kx^2-2k^2}{2x^3+2x^2+2kx+2k}$, si $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x^2} = L>0$

$\Rightarrow$ Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ también

Pero si $k \neq \frac{1}{2}$, el denominador tiene grado 3 y el numerador tiene grado 2

$\Rightarrow$ $f(x)$ es de la misma clase que $\frac{1}{x}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

Calculemos $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$: si $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \Rightarrow F(x) = \int_1^x \frac{t}{2t^2+1} - \frac{1}{2(t+1)}\,dt$

$= \int_1^x \frac{t}{2t^2+1}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t+1} \overset{*}{=} \frac{1}{4}\left[\log(2x^2+1) - \log(3)\right] - \frac{1}{2}\left[\log(x+1) - \log(2)\right]$

$\rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\log\left(2x^2+1/(x+1)^2\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\log(2) - \log\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{8}{3}\right)$

$* \int_1^x \frac{t}{2t^2+1}\,dt \underset{\substack{u=2t^2+1 \\ du = 4t\,dt}}{=} \frac{1}{4}\int_3^{2x^2+1} \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\log(2t^2+1)\Big|_1^x$

→ Ejercicio 4.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} = 1$

b. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\, dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(u^2)\, du = 2\int_1^{+\infty} 2u \operatorname{sen}(u^2) \cdot \frac{1}{2u}\, du =$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$\underset{\uparrow}{=} 2\left[-\frac{\cos(u^2)}{2u}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u^2)}{2u^2}\, du\right]$, como $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(u^2)}{2u^2}\right| du < \infty$

$f = 1/2u \to f' = -1/2u^2$

$g' = \operatorname{sen}(u^2)\, 2u \to g = -\cos(u^2)$

y $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\cos(u^2)}{2u} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} \cdot dx < \infty$

Sin embargo, $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\, dx$

como la primera converge, alcanza probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\, dx = +\infty$,

para ésta, escribimos $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\, dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\, dx$, pero $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$ así que podemos ver

que la segunda converge y listo:

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \cos(u) \cdot \frac{1}{u}\, du \underset{\uparrow}{=} \operatorname{sen}(u)/u \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u^2}\, du$

$u = 2x$ $\quad f = 1/u \to f' = -1/u^2$

$du = 2dx$ $\quad g' = \cos(u) \to g = \operatorname{sen}(u)$

donde la primera es acotada y $\int_2^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(u)}{u^2}\right| du \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, du < \infty$

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u^2}\, du < \infty$