→ Ejercicio 4.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ : $a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1}$

$= \frac{2(n+1)-1}{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ : Si $a_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{n(n-1)\cdots 1}}{\cancel{n(n-1)\cdots 1}}$

$= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} (n+1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

→ Ejercicio 5.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ : $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim e^{\log((2n-1)^{1/n})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim e^{\frac{1}{n}\log(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ : $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$

→ Ejercicio 7. CRITERIO DE LEIBNITZ: Si $a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ converge

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ . Considerando $a_n = \frac{1}{3^n}$

tenemos que es monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{3^n} < \infty$

Además, podemos mirar la convergencia absoluta.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ es ABSOLUTAMENTE convergente sii $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \right| < \infty$

y tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} < \infty \Rightarrow$ nuestra serie es convergente y abs. convergente.

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$

Estudiemos la conv. absoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n (n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15} \right|$$

Usando el criterio del equivalente: $a_n = \frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^4+8n^3+5n^2}{n^5+4n^3+15}$$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{n^5} = 1 \Rightarrow a_n \sim b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \infty \Rightarrow$ nuestra serie es absolutamente convergente y por lo tanto, convergente

→ Ejercicio 8.

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$, si $a_n = \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$ y $b_n = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \cdot (n+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log(n+1)} = +\infty$

$\Rightarrow \exists n_0 / \ a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$ por comparación

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$, si $a_n = \frac{n^3}{e^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \sum a_n < \infty$.

CRITERIO DE LA RAÍZ

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, usando el CRITERIO DE LEIBNITZ con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

tenemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ y $a_n$ es monótona decreciente $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} < \infty$