PRÁCTICO 4.

Ejercicio 1. $\sum_{n=k}^{k+l} r^n = \dfrac{r^k - r^{k+l+1}}{1-r}$, $r \neq 1$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n} = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=3}^{3+l} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n}$

$= \lim_{l\to\infty} \dfrac{(1/\sqrt{3})^3 - (1/\sqrt{3})^{3+l+1}}{1-1/\sqrt{3}} = \dfrac{(1/\sqrt{3})^3}{1-1/\sqrt{3}} = \dfrac{1/9}{1-1/\sqrt{3}}$

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \log(n+1) - \log(n)$ pero entonces $S_N = 2\sum_{n=1}^{N} \log(n+1) - \log(n) =$
$2(\log(N) - \log(1)) = 2\log(N)$ y $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

g.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, notar que $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{-1}{2(n+1)} + \dfrac{2}{(n+2)} - \dfrac{3}{2(n+3)}$

$= \left(-\dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+2)}\right) + \left(\dfrac{3}{2(n+2)} - \dfrac{3}{2(n+3)}\right)$

Si $x_n = \dfrac{1}{2(n+1)} \Rightarrow \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = (-x_{n+1} + x_{n+2}) + (3x_{n+2} - 3x_{n+3})$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{l\to\infty} -x_2 + x_{n+2} + 3x_3 - 3x_{n+3} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{4}$

FECHA

→ Ejercicio 2.

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$ Como sabemos que una exponencial crece más rápido que un polinomio, tenemos que $\frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ para N grande. Otra forma de verlo es estudiar la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} \underset{y=\sqrt{x}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{y^4}{e^y} = 0$

$\Rightarrow \exists N>0 / \; x^2 \leq e^{\sqrt{x}} \; \forall x \geq N \Rightarrow (n+1)^2 \leq e^{\sqrt{n+1}} \; \forall n \geq N.$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$, también converge nuestra suma original

→ Ejercicio 3.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; Si $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0$

$\Rightarrow a_n \sim b_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$; Si $a_n = \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\log(n+1) - \log(n))}{10n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \log(1+1/n)}{10n}$

$= \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} n\log(1+1/n) \; *$

Mirando la función $f(x) = x\log(1+1/x)$, tenemos que

$\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+1/x)}{1/x} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2}{1+1/x} \cdot (-x^2)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1 \rightarrow * = \frac{1}{10} \rightarrow a_n \sim b_n$ y converge.

NOTA