→ Ejercicio 6.

a. Podemos definir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k-3 \\ 2 & \text{si } n = 4k-2 \\ 3 & \text{si } n = 4k-1 \\ 4 & \text{si } n = 4k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$

b. Definimos a_n como la siguiente sucesión: $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

c. Como los puntos de A se acumulan en $0 \Rightarrow 0$ debería ser de aglomeración pero no es de la forma $1/n$.

→ Ejercicio 7.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = b$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = c$. Pero la sucesión (a_{6n}) es subsucesión de a_{2n} y $a_{3n} \Rightarrow a_{6n} \to a$ pero $a_{6n} \to b \Rightarrow a = b$. Además, la sucesión a_{3+6n} es subsucesión de a_{2n+1} y $a_{3n} \Rightarrow a_{3+6n} \to b$ y $a_{3+6n} \to c \Rightarrow b = c = a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a.$

NOTA

HOJA

FECHA

→ Ejercicio 8. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente.

($\Rightarrow$) claramente si $L = \sup(A) \rightarrow L \geq x \ \forall x \in A$

Además, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A \,/\, |L - x| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1/m \ \forall m$, podemos definir la sucesión $(x_m) \subset A \,/\, |x_m - L| < 1/m$ y claramente converge a L.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\sup(A) = K < L$. Como $x_m \xrightarrow{m} L$, sea $d = |L - K|$, $\exists m_0 \,/\, |L - x_{m_0}| < d \Rightarrow x_{m_0} > K$ lo cual es absurdo

→ Ejercicio 9. Sea (a_n) tq $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n} \end{cases}$

a. Por inducción:

PB: $0 \leq a_1 \leq 3$

PI: Supongamos que $0 \leq a_k \leq 3 \ \forall k \leq n \Rightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n} \leq 3$

La primera desigualdad es trivial pues $a_n \geq 0$.

Para la segunda: $3(1+a_n) \leq 3(3+a_n) \Leftrightarrow 3 + 3a_n \leq 9 + 3a_n \Leftrightarrow 3 \leq 9$ ■

b. $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{3 + 3a_n - 3a_n - a_n^2}{3+a_n} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - a_n^2}{3+a_n} \leq 0$, como $3 + a_n > 0$,

buscamos que $3 - a_n^2 \leq 0$

De nuevo por inducción:

PB: $a_1 = 3 \Rightarrow a_1^2 = 9 \geq 3$.

PI: $3 - a_{n+1}^2 = 3 - \dfrac{9(1+a_n)^2}{(3+a_n)^2} = \dfrac{3(9 + 6a_n + a_n^2) - 9(1 + 2a_n + a_n^2)}{(3+a_n)^2}$

$= \dfrac{18 - 6a_n^2}{(3+a_n)^2} \leq 0$ pues $a_n^2 \geq 3$.

FECHA

c. Como a_n es monótona decreciente y acotada inferiormente por 0, tiene límite.

Si tomamos $n \to \infty \to a_{n+1} - a_n \to 0 \Rightarrow a_n^2 \to 3 \Rightarrow a_n \to \sqrt{3}$

→ Ejercicio 10.

a. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Big/ \begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$

b. Monotonía. Primero observar que $a_n > 0 \ \forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ sii $\sqrt{2+a_n} \geq a_n \Leftrightarrow 2 + a_n \geq a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)(a_n + 1) \leq 0$ $\Leftrightarrow a_n \leq 2$. Para probar esto último, de nuevo hacemos inducción:

$a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ ✓

Si $a_n \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + a_n \leq 4 \Leftrightarrow a_n \leq 2$ ✓

$\Rightarrow a_n$ es monótona creciente.

Acotación: por el razonamiento anterior, a_n está acotada superiormente por 2 e inferiormente por 0.

Convergencia. $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 \xrightarrow{n} 0$

$\Rightarrow a_n \to 2$