PRÁCTICO 3: SUCESIONES

→ Definición Una sucesión es una función $a: \mathbb{N} \to X$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots$). Denotamos $a_n = a(n)$. y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(\mathbb{N})$

→ Definición Decimos que a_n tiene límite L y denotamos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ sii $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / |a_n - L| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$.

→ Definición. Decimos que a_n está acotada si $\exists K \in \mathbb{R} / |a_n| \leq K \; \forall n \in \mathbb{N}$

→ Definición. Decimos que a_n es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ y monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

→ TEOREMA. Si a_n es monótona creciente y acotada superiormente → tiene límite

→ Ejercicio 1.

a. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

Lo primero es observar que a_n es monótona decreciente (de hecho estrictamente):

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = a_n$$

Además, está acotada inferiormente: $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$ pues $n > 0$

⇒ tiene límite $1 = \lim_{n\to\infty} a_n$. Esto es porque 1 es cota inferior y si considero $\varepsilon > 0$ y $L' = 1 + \varepsilon \Rightarrow \exists n_0 / \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow 1 + \frac{1}{n_0} < L' \Rightarrow L'$ no puede ser límite.

b. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Dado que para valores pares de n, $(-1)^n = 1$ y para valores impares $(-1)^n = -1$, la sucesión No es monótona

Por otro lado, sí es acotada

- $0 \leq a_n \; \forall n$ pues si n par $\Rightarrow$ es trivial pues $a_n > 1$. y si n impar:

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{si } n \geq 1$$

- $a_n \leq 2$ pues para n par, $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ si $n \geq 1$.

Por último, como $(-1)^n$ es acotada y $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$$

d. $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Monotonía: $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \geq \frac{n^2}{n^2+1}$

$\Leftrightarrow \cancel{(n+1)^2 n^2} + (n+1)^2 \geq \cancel{n^2(n+1)^2} + n^2 \Leftrightarrow \cancel{n^2} + 2n + 1 \geq \cancel{n^2} \Leftrightarrow 2n+1 \geq 0$

$\Rightarrow a_n$ es monótona creciente

Acotación: $a_n \geq 0$ y $a_n \leq 1$ pues $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow n \leq \sqrt{n^2+1} \Leftrightarrow n^2 \leq n^2+1$

$\Leftrightarrow 1 \geq 0$.

Por último, como, $\lim_{n\to\infty} n^2+1 = \lim_{n\to\infty} n^2$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

e. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

Monotonía: $a_{n+1} \leq a_n$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ es monótona decreciente.

Además $a_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow$ debe tener límite que llamamos L

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n}{2\cdot 2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{1}{2^{n-1}}}^{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to L} = 0$$

→ Ejercicio 3.

d. $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Vamos a usar la regla del sandwich

Supongo que $\beta \geq \alpha \Rightarrow \beta^n \geq \alpha^n \geq 0. \Rightarrow \beta^n + \beta^n \geq \alpha^n + \beta^n \geq 0 + \beta^n = \beta^n$

$\Rightarrow 2\beta^n \geq \alpha^n + \beta^n \geq \beta^n \Rightarrow (2\beta^n)^{1/n} \geq (\alpha^n + \beta^n)^{1/n} \geq (\beta^n)^{1/n}$

$\Rightarrow 2^{1/n} (\beta^n)^{1/n} \geq (\alpha^n + \beta^n)^{1/n} \geq (\beta^n)^{1/n}$. Como $2^{1/n} \to 2^0 = 1$ si $n \to \infty$, tenemos que, tomando límite

$\beta = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} (\beta^n)^{1/n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha^n + \beta^n)^{1/n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} (\beta^n)^{1/n} = \beta.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$

→ Ejercicio 5.

a. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

Notar que si n es impar, $a_n = 0$ y tenemos que $\{a_{2n+1}\}$ es una subsucesión convergente

Si n es par, $a_n = \frac{1}{2}$ y tenemos que $\{a_{2n}\}$ es una subsucesión convergente.

Pero $\{a_n\}$ oscila

d. $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

El cos oscila entre $-1, 1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

Por lo tanto $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ pero tiene subsucesiones convergentes