→ Ejercicio 8.

b. $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = sen(2x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

La ecuación homogénea es

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$\Rightarrow$ su polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

O sea que la solución de la homogénea es

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} sen(x)$$

En nuestro caso $r(x) = sen(2x) \Rightarrow p = 0, q = 2$ $A = 0, B = 1$, entonces $p \pm iq$ No es raíz del polinomio característico y buscamos soluciones de la forma

$$y_p(x) = \tilde{A}\cos(2x) + \tilde{B}\,sen(2x),\ \tilde{A}, \tilde{B} \text{ constantes.}$$

$$\hookrightarrow y_p'(x) = -2\tilde{A}\,sen(2x) + 2\tilde{B}\cos(2x)$$

$$\hookrightarrow y_p''(x) = -4\tilde{A}\cos(2x) - 4\tilde{B}\,sen(2x)$$

Buscamos $\tilde{A}, \tilde{B}$ tq

$$-4\tilde{A}\cos(2x) - 4\tilde{B}\,sen(2x) + 2(-2\tilde{A}\,sen(2x) + 2\tilde{B}\cos(2x)) + 2(\tilde{A}\cos(2x) + \tilde{B}\,sen(2x)) = sen(2x)$$

$$\Rightarrow \cos(2x)[-4\tilde{A} + 4\tilde{B} + 2\tilde{A}] + sen(2x)[-4\tilde{B} - 4\tilde{A} + 2\tilde{B}] = sen(2x)$$

$$\cos(2x)[-2\tilde{A} + 4\tilde{B}] + sen(2x)[-4\tilde{A} - 2\tilde{B}] = sen(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\tilde{A} + 4\tilde{B} = 0 \Rightarrow \tilde{A} = 2\tilde{B} \\ -4\tilde{A} - 2\tilde{B} = 1 \end{cases} \Big\}\ -4 \cdot 2\tilde{B} - 2\tilde{B} = 1 \Rightarrow -10\tilde{B} = 1 \Rightarrow \tilde{B} = -\frac{1}{10} \Rightarrow \tilde{A} = -\frac{1}{5}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10} sen(2x)$$

$$\Rightarrow y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x} sen(x) + \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10} sen(2x).$$

Para que cumpla las condiciones iniciales

$$y'(x) = -C_1 e^{-x}\cos(x) - C_1 e^{-x} sen(x) - C_2 e^{-x} sen(x) + C_2 e^{-x}\cos(x) - \frac{2}{5} sen(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x)$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0) = 0 \Rightarrow -C_1 + C_2 - 1/5 = 0 \\ y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + 1/5 = 1 \Rightarrow C_1 = 4/5 \end{array}\right\}\ C_2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

e. $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$ → En este caso, $r(x) = 3e^x + x$ NO es de la forma $r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$

¿Cómo hacemos?

descomponemos $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ donde $r_1(x) = x$, $r_2(x) = 3e^x$ y obtenemos dos ec. dif.

$$y'' + 4y' + 3y = 3e^x \quad (1)$$
$$y'' + 4y' + 3y = x \quad (2)$$

Los resolvemos por separado y luego sumamos las soluciones:

1. Para ambas, la homogénea correspondiente es.

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -\frac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \to -1 \\ \to -3 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

2. Solución particular de (1): como $p = 1$, si $q = 0 \Rightarrow A(x) = 3$, $B(x) = 0$

pues $3e^x = e^x(3\cos(0x) + 0\operatorname{sen}(0x))$

tenemos que $1 + 0i$ NO es raíz del polinomio característico ⇒ buscamos una solución de la forma

$$y_{P,1}(x) = e^x(\tilde{A}(x)\cos(0x) + \tilde{B}(x)\operatorname{sen}(0x)) = \tilde{A}e^x$$

$$\Rightarrow y_{P,1}'(x) = \tilde{A}e^x = y_{P,1}''(x)$$

$$\Rightarrow y_{P,1}''(x) + 4y_{P,1}'(x) + 3y_{P,1}(x) = \tilde{A}e^x(1+4+3) = 8\tilde{A}e^x = 3e^x$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = 3/8 \Rightarrow y_{P,1}(x) = \frac{3}{8}e^x$$

3. Solución particular de (2): como $p = 0$, si $q = 0$, $A = x$, $B = 0$ pues

$x = e^{0x}(x\cos(0x) + 0\operatorname{sen}(0x))$ y 0 NO es raíz del polinomio característico

⇒ buscamos soluciones de la forma $y_{P,2}(x) = e^{0x}(\tilde{A}(x)\cos(0x) + \tilde{B}(x)\operatorname{sen}(0x)) = \tilde{A}(x)$

Donde $\hat{A}(x) = ax + b \Rightarrow y_{P,2}'(x) = a$, $y_{P,2}''(x) = 0$

$$\Rightarrow 0 + 4a + 3(ax+b) = x \Rightarrow \begin{array}{l} 3a = 1 \Rightarrow a = 1/3 \\ 4a + 3b = 0 \Rightarrow b = -4/9 \end{array} \Rightarrow y_{P,2}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} + \frac{3}{8}e^x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$