→ Ejercicio 6. $y'' + ay' - 2y = 0$. Queremos que $y(x) = e^x$ sea solución y tenemos que

$y'(x) = e^x$ e $y''(x) = e^x \Rightarrow e^x + ae^x - 2e^x = 0 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} 1 + a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

como $e^x > 0 \ \forall x$

Ahora nuestra ecuación es: $y'' + y' - 2y = 0$. Para encontrar la solución general, estudiamos el polinomio característico:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

En el caso de que las condiciones iniciales sean $y(0) = y'(0) = 1$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = -C_2 + 1 \\ y'(0) = C_1 - 2C_2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -C_2 + 1 - 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \Rightarrow C_1 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^x$$

→ Ejercicio 7. $y'' + ay' + by = 0$. Queremos que $y(x) = e^{2x}\cos(x)$ sea solucion.

$y'(x) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\operatorname{sen}(x) \rightarrow y''(x) = 4e^{2x}\cos(x) - 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) - 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) - e^{2x}\cos(x)$

$\Rightarrow 4e^{2x}\cos(x) - 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) - 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) - e^{2x}\cos(x) + a(2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\operatorname{sen}(x)) + be^{2x}\cos(x) = 0$

Agrupando los términos donde aparece sen y cos y sacando e^{2x} de factor común.

$$e^{2x}[\cos(x)(4-1+2a+b) + \operatorname{sen}(x)(-2-2-a)] = 0$$

$\underset{e^{2x}>0}{\Rightarrow}$ $\cos(x)(3+2a+b) + \operatorname{sen}(x)(-4-a) = 0$ y como cos y sen son l.i

$$\left.\begin{cases} 3+2a+b=0 \\ -4-a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4} \end{cases}\right\} \; 3-8+b=0 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

Ahora nuestra ecuación es $y'' - 4y' + 5y = 0$. El polinomio característico es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

y tenemos soluciones complejas $\frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} \cos(x) + C_2 e^{2x} \operatorname{sen}(x)$$

Si las condiciones iniciales son $y(0) = y'(0) = 1$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = 2C_1 + C_2 = 1 \end{array}\right\} \quad 2 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{2x} \cos(x) - e^{2x} \operatorname{sen}(x).$$

→ Ejercicio 8.

a. $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$*) \quad y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

$$\rightarrow y_* (x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \operatorname{sen}(x)$$

P) Si $r(x) = \cos(2x) \Rightarrow$ Buscamos soluciones de la forma $y_p(x) = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$

$\Rightarrow y_p'(x) = -2A\operatorname{sen}(2x) + 2B\cos(2x) \Rightarrow y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\operatorname{sen}(2x)$

$\rightarrow -4A\cos(2x) - 4B\operatorname{sen}(2x) + 2(-2A\operatorname{sen}(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)) = \cos(2x)$

Agrupando en sen y cos

$$\cos(2x)(-4A + 4B + 2A) + \operatorname{sen}(2x)(-4B - 4A + 2B) = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2A + 4B = 1 \\ -4A - 2B = 0 \Rightarrow -2A = B \end{array}\right\} \quad B + 4B = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{5}} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(x)$$

$y(0) = C_1 + 1/5 = 1$

$y'(0) = C_2 - 1/10 = 0$