PRÁCTICO 1: NUMEROS COMPLEJOS

→ Ejercicio 2.

a. $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i \rightarrow z = 2e^{i\pi/2}$

f. $i^5+i^{16} = i^2 i^2 i + (i^2)^8 = (-1)^2 i + (-1)^8 = -i+1 = z$

$|z| = \sqrt{2}$ $\Rightarrow z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

$\varphi = \text{Arctg}(-1) = -\pi/4$

j. $z = \frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8}) = \frac{1}{2}(1+i)\left(1-\frac{1}{i^8}\right) = \frac{1}{2}(1+i)(1-1) = 0$

→ Ejercicio 3.

c) $z = \frac{1-e^{\pi/2 i}}{1+e^{\pi/2 i}} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$

d) $(i+1)^{100} = ((1+i)^2)^{50} = (1+2i+i^2)^{50} = (2i)^{50} = 2^{50}.(i^2)^{25} = 2^{50}(-1)^{25} = -2^{50}$

→ Ejercicio 9. Sea $A = \{ (\cos(\frac{\pi}{7}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{7}))^n : n \in \mathbb{N} \}$

Pasando la expresión a coordenadas polares: $A = \{ (e^{i\pi/7})^n : n \in \mathbb{N} \}$

n	$(e^{i\pi/7})^n$	n	$(e^{i\pi/7})^2$
0	1	8	$e^{i8\pi/7}$
1	$e^{i\pi/7}$	9	$e^{i9\pi/7}$
2	$e^{i2\pi/7}$	10	$e^{i10\pi/7}$
3	$e^{i3\pi/7}$	11	$e^{i11\pi/7}$
4	$e^{i4\pi/7}$	12	$e^{i12\pi/7}$
5	$e^{i5\pi/7}$	13	$e^{i13\pi/7}$
6	$e^{i6\pi/7}$	14	$e^{i14\pi/7} = e^{i2\pi} = 1$
7	$e^{i7\pi/7} = e^{i\pi} = -1$	15	$e^{i15\pi/7} = e^{i(2\pi + \pi/7)} = e^{i\pi/7}$

La expresión $(e^{i\pi/7})^n$ toma 14 valores distintos $\Rightarrow \#A = 14$.

→ Ejercicio 10. Sea $P(z)$ un polinomio de coeficientes reales

a. Supongo que $P(z)$ es de grado $n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$; $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i =$

$P(\overline{z}) = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 (\overline{z})^2 + \ldots + a_n (\overline{z})^n = a_0 + \overline{a_1 z} + a_2 \overline{z^2} + \ldots + a_n \overline{z^n} =$

$= a_0 + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \ldots + \overline{a_n z^n} = \overline{P(z)}$

b. Supongo que $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$ es raíz de $P \Rightarrow P(z_0) = 0$. Como $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)}$

$\Rightarrow P(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0 \Rightarrow \overline{z_0}$ es raíz.

→ Ejercicio 4.

c) Sean $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$$|z_1+z_2| = |(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$
$$|z_1|+|z_2| = \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

⇒ alcanza ver que $|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$ pues ambos términos son positivos.

$$|z_1+z_2|^2 = (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2}^{\,2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2}^{\,2} + 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a_1^2} + 2a_1a_2 + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + 2b_1b_2 + \cancel{b_2^2} \leq \cancel{a_1^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_2^2} + 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{2}a_1a_2 + \cancel{2}b_1b_2 \leq \cancel{2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

Si el lado izquierdo de la desigualdad es negativo ✓

Si no, elevando al cuadrado de ambos lados

$$a_1^2\cancel{a_2^2} + b_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \leq (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) = a_1^2a_2^2 +$$
$$= \cancel{a_1^2a_2^2} + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + \cancel{b_1^2b_2^2}$$
$$\Leftrightarrow a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \geq 0 \Leftrightarrow (a_1b_2 + b_1a_2)^2 \geq 0 \quad \square$$