Planificación y programación de procesos y operaciones en Introducción a la Ingeniería de Producción

Docente: *Carlos Testuri*

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación.
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República, Uruguay

2024

Contenido

Problema de *Despacho de Intervalos* (PDI)

Dado un *recurso* de uso exclusivo y un conjunto de *intervalos* continuos de tiempo (actividades) que requieren su uso.
Ejemplo: un salón podría ser el recurso y clases a dictarse en él los intervalos.
¿Qué otros dominios se pueden modelar con el problema?

Se dice que un *par de intervalos es compatible* si estos no se superponen en el tiempo.
En general se dice que un *subconjunto de los intervalos es compatible* si todo par de intervalos de este es compatible.

Problema: Dado un conjunto de intervalos. Se requiere determinar un subconjunto de intervalos compatibles de mayor tamaño posible.

Técnicas de resolución: Algoritmos ávidos, Programación Lineal

Planificación de la producción minimizando costo en *Carpintería-1*

Una carpintería produce escritorios, mesas y sillas a partir de los insumos madera y mano de obra especializada en carpintería y terminación.
Se cuenta con la disponibilidad de insumos, requerimientos de insumos y costos de producción según productos:

Insumos	Disponible	Requerimientos por producto		
		Escritorio	Mesa	Silla
Madera (m^2)	50	8	6	1
Carpintería (h)	80	2	1,5	0,5
Terminación (h)	140	4	2	1,5
Costo de producción ($)		48	32	12

El objetivo es determinar la cantidad de productos a producir que minimice el costo total sujeto a la disponibilidad de insumos y requerimientos de estos para cada producto.
Técnica de resolución: Programación Lineal (PL).

Planificación de la producción maximizando beneficio en *Carpintería-2*

Una carpintería produce escritorios, mesas y sillas a partir de la disposición y *posible adquisición* de los insumos madera y mano de obra especializada en carpintería y terminación.
Se cuenta con precios y disponibles de los insumos, y requerimientos de insumos según productos. Además, se cuenta con costos de producción, precios de venta y demanda de los productos.

Insumos	Precio ($)	Disponible	Requerimientos por producto		
			Escritorio	Mesa	Silla
Madera (m^2)	2	50	8	6	1
Carpintería (h)	5	80	2	1,5	0,5
Terminación (h)	4	140	4	2	1,5
	Costo de producción ($)		48	32	12
		Precio de venta ($)	60	40	15
		Demanda	15	20	40

El objetivo es determinar la cantidad de productos a producir que maximice el beneficio sujeto a la disponibilidad y adquisición de insumos, la demanda y los requerimientos de insumos por producto. Técnica de resolución: PL.

Planificación de producción en *Procesos*

Una planta produce a partir de procesos físico-químicos implementados en reactores.
Los reactores generan productos de salida a partir de insumos de entrada, energía, etc.
Los productos de salida de algunos reactores pueden ser insumos de entrada en otros reactores.

El objetivo es establecer un plan de producción que maximize el beneficio dado por la valoración de los productos, sujeto a restricciones de producción.

Planificación de producción en *Procesos* (cont.)

Los procesos en reactores $\{1,2,3\}$ se pueden modelar mediante un diagrama de flujo de productos $\{A,B,C,D,E\}$ entre los reactores y el medio.

Para cada proceso se cuenta con los requerimientos de los insumos de entrada y los productos de salida (proporción de formulación), el costo unitario de operación y su capacidad,

Proceso	Entradas (prop.)		Salidas (prop.)		Costo	Cap.
1	M.prima (1)		A (0,6)	B (0,4)	2	3.000
2	A (1)		C (0,8)	D (0,2)	4	1.500
3	B (0,3)	C (0,7)	E (0,9)	Perdida (0,1)	3	2.500

Se cuenta con el precio de los productos, $\{(A,3),(B,2),(C,3),(D,6),(E,5)\}$.

El objetivo es establecer un plan de producción que maximize el beneficio dado por la valoración de la producción, sujeto a las formulaciones y capacidades.
Técnica de resolución: Programación Lineal, Programación No-lineal

Optimización de *Control de Proceso*

Dado un reactor/bioreactor se busca controlar la dinámica temporal del proceso atendiendo a un objetivo dado.
El proceso está determinado por condiciones iniciales (temperatura, concentraciones de insumos, etc) y la dinámica temporal de las reacciones/biotransformaciones que se desarrollan se representan con funcionales y ecuaciones diferenciales.

Otras áreas de aplicación

- equipamiento
- economía nacional
- sistemas ciber-físicos

Técnica de resolución: Control óptimo.

Portafolio de *Proyectos*

Una agencia de desarrollo debe decidir como invertir un fondo de $12 millones que dispone para financiar proyectos.

Para proyectos precalificados se cuenta con información sobre: el tipo de proyecto, dos evaluaciones, la duración en años y la utilidad que le da a la agencia.

Proyecto	Tipo	Eval-1	Eval-2	Duración	Utilidad
Proy-A	base	3	4	2	8
Proy-B	especial	4	3	1,5	9
Proy-C	base	5	4	2,5	8
Proy-D	especial	4	5	1,5	10
Proy-E	medio	5	4	2,5	9

Portafolio de *Proyectos* (cont.)

Se establecen los requisitos:

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los $5 millones,
2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los $3 millones,
3. La duración media ponderada según inversión no debe superar dos años.
4. La utilidad media ponderada según inversión debe ser superior a ocho.

El objetivo es distribuir el fondo entre los proyectos de forma de maximizar la utilidad ponderada según inversión.

Técnica de resolución: Programación Lineal.

Problema de determinación de *Turnos*

Una institución tiene que determinar el personal necesario para cubrir turnos de servicio semanales.
Para cada día de la semana, $i \in \{1, ..., 7\}$, se requiere que cierta cantidad, d_i, de funcionarios esté de turno prestando servicio.
Cada funcionario trabaja en un turno durante 5 días seguidos.

El objetivo es determinar la cantidad mínima de funcionarios que se necesitan en cada turno cumpliendo los requerimientos.

Técnica de resolución: Programación Lineal.

Problema de *Determinación de Lotes de Producción* (LSP)

Consiste en decidir en $t \in \{1, ..., n\}$ períodos un plan de producción de un producto en cantidad x_t, que atienda su demanda d_t, y almacene excedentes s_t. Mientras minimiza costos de producción fijos y variables, y costos de almacenamiento.

Las cantidades pueden representarse mediante un diagrama de flujo

$$
\begin{tikzcd}
 & x_t \arrow[d] & \\
\cdots\ s_{t-1} \arrow[r] & t \arrow[r] \arrow[d] & s_t\ \cdots \\
 & d_t &
\end{tikzcd}
$$

De este problema se pueden derivar variantes que incluyan

- múltiples productos,
- equipamiento con capacidades,
- niveles de procesamiento.

Técnica de resolución: Programación Entera-Mixta (Lineal), Heurísticas.

Problema del *Viajante* (TSP)

Un viajante debe visitar un conjunto de ciudades una única vez y retornar a la de partida. Se conoce el costo de viajar de una ciudad a otra.
Se requiere encontrar el orden de menor costo en que se recorren.

Aplicaciones de recorridos de

- taladro sobre un tablero a perforar
- dispensador de medicamentos
- vehículos con recogida y entrega entre depósitos y usuarios
- robot con recogida, clasificación y entrega en depósito

Técnicas de resolución: Programación Entera, Heurísticas.

Problema de *Enrutado de Vehículos* (VRP)

Es una generalización del problema del viajante.
Dada una flota de vehículos y un conjunto de usuarios. Se trata de determinar el conjunto de rutas de costo total mínimo que deben hacer los vehículos para satisfacer demandas de los usuarios.

Del problema básico, donde se tiene un depósito desde donde salen los vehículos, se pueden derivar variantes:

- existencia de varios depósitos
- cada vehículo tiene una capacidad de carga
- cada usuario debe ser visitado en una franja horaria
- cada usuario puede ser atendido por varios vehículos
- además de realizar entregas se pueden incluir retiros

Técnicas de resolución: Programación Entera, Heurísticas.

Problema de *Localización de Instalaciones*

Una empresa planifica abrir plantas en posibles lugares $j \in \{1, ..., n\}$ incurriendo en un costo fijo de instalación f_j para atender la demanda d_i de un producto por parte de sus clientes $i \in \{1, ..., m\}$.

Cada cliente puede ser suministrado, desde las plantas que se decide abrir, a un costo unitario de transporte c_{ij}.

Se busca determinar que plantas se abren y desde cuales de estas se atienden a que clientes de forma de minimizar los costos fijos y de transporte.

¿Qué otros dominios se pueden modelar con este problema?
¿Cómo pueden variar las soluciones en función de la relación entre los costos de instalación y los costos unitarios de transporte?

Técnica de resolución: Programación Entera-Mixta (Lineal).

Problema de *Localización de Instalaciones Competitivas*

Las empresas A y B compiten en localizar puestos de venta en una playa.
Las posibles localizaciones están dadas. No se permite abrir más de un puesto en una localización, ni abrir puestos en localizaciones contiguas.
Las empresas seleccionan alternadamente en donde localizar sus puestos de $i \in \{1, ..., n\}$ posibles localizaciones con valor v_i.
La empresa B tiene como meta alcanzar un valor acumulado V en localizaciones seleccionadas. Se busca determinar si existe una estrategia de selección para B tal que el valor acumulado sea mayor o igual a V, independientemente de como elija A, que selecciona primero.

Dada la instancia, en que B elige segunda,

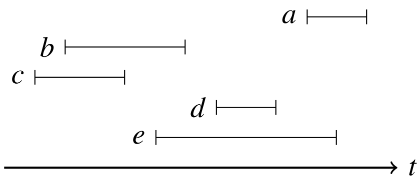
$$4 - 10 - 2 - 1 - 6 - 4 - 10 - 6 - 2 - 10$$

¿Logra B la meta según $V = 16$ o según $V = 18$?

Técnicas de resolución: Enumerativas, Heurísticas.

Problema de *Despacho de Intervalos* (PDI)

Dado un *recurso* de uso exclusivo y un conjunto de *intervalos* continuos de tiempo que requieren su uso.
Se dice que un *par de intervalos es compatible* si estos no se superponen en el tiempo.
En general se dice que un *subconjunto de los intervalos es compatible* si todo par de intervalos de este es compatible.
¿Cuáles intervalos y subconjuntos son compatibles para la siguiente instancia?



Problema: Dado un conjunto de intervalos. Se busca determinar un subconjunto de intervalos compatibles de mayor tamaño posible.

¿Cómo podría resolverse?

Técnica de resolución algorítmica para el PDI

Una técnica de resolución de algunos problemas de optimización consiste en determinar su solución mediante una secuencia de decisiones. Donde en cada etapa de la secuencia *se toma la mejor decisión disponible*, con la esperanza de llegar a una solución óptima.
Para esto se necesita una *regla* que determine la mejor decisión disponible.
La técnica se denomina *algoritmo ávido* (*greedy*).

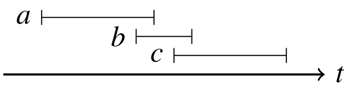
En el PDI la técnica consiste en considerar secuencialmente la compatibilidad de cada intervalo con un subconjunto de intervalos compatibles que se determinó previamente.
A partir de alguna regla se considera un primer intervalo. Luego se van considerando, según la regla, los restantes intervalos que son compatibles con los que ya se ha determinado que son parte de la solución.

¿Qué reglas se pueden considerar?

Reglas de selección de intervalos para algoritmo de resol. del PDI (1/2)

Regla 1: *Seleccionar el intervalo disponible que comienza más temprano*.
Si el intervalo seleccionado que comienza más temprano tiene una amplitud muy grande, otros intervalos que se superponen con él quedan excluidos de la solución.
Por lo cual se podría terminar con una solución que no es la mejor.

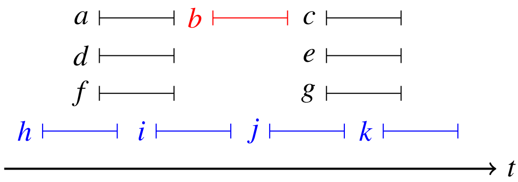
Regla 2: *Seleccionar el intervalo disponible que tiene la amplitud más pequeña*.
También, puede llevar a una solución que no es la mejor. A modo de contraejemplo sea la instancia:



El intervalo b se consideraría como parte de la solución, dado que tiene la menor amplitud y no es compatible con los otros dos. Lo cual excluye la solución óptima que forman los intervalos a y c.

Reglas de selección de intervalos para algoritmo de resol. del PDI (2/2)

Regla 3: *Seleccionar el intervalo disponible con menor cantidad de intervalos no compatibles*.
También, puede llevar a una solución que no es la mejor. A modo de contraejemplo se tienen los intervalos



Regla 4: *Seleccionar el intervalo disponible que finaliza más temprano*.
Esta regla asegura que el recurso esté disponible lo antes posible luego de atender un intervalo, por lo cual maximiza el tiempo restante para atender a los intervalos remanentes.

¿Regla 5?: *¿Alguna otra regla que resuelva el problema?*

Algoritmo para PDI con selección de intervalo que finaliza más temprano

Algoritmo ávido para resolver el PDI con Regla 4:

Datos: I : conjunto de intervalos con tiempos de comienzo y finalización
Resultado: S : subconjunto de I (inicialmente vacío)
mientras *I no es vacío* **hacer**
    Elegir el intervalo $i \in I$ con menor tiempo de finalización ;
    Agregar i a S ;
    Eliminar de I el intervalo i y los intervalos que no son compatibles con i ;
fin
devolver S;

Análisis del algoritmo:

a. ¿Termina el algoritmo?
b. ¿Es S un conjunto compatible?
c. ¿Es S una solución óptima?

Técnica de resolución a partir de modelo algebraico para el PDI

Alternativamente muchos problemas de optimización se pueden formular mediante algebra y resolverse con algoritmos generales.

- Los problemas de *Programación Lineal* se puede resolver con el algoritmo *Simplex*,
- Los problemas de *Programación Entera-Mixta* se puede resolver mediante el algoritmo de *Ramificado y Acotamiento*.

El problema PDI puede modelarse algebraicamente a partir de:

P: conjunto de pares de intervalos (i,j) que no son compatibles,

x_i: variable que vale 1 si $i \in I$ es seleccionado y 0 en otro caso

según formulación algebraica:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sum_{i \in I} x_i \\ \text{sujeto a} & x_i + x_j \leq 1, \quad (i,j) \in P, \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I. \end{array}$$

Formulación que se resuelve mediante un algoritmo general adecuado.

Problemas derivados del Problema de Despacho de Intervalos

1. Los intervalos se van presentando a medida que se resuelve el problema, es decir no todos son conocidos previo a la resolución del problema.

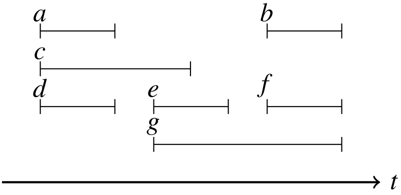
2. Se dispone de recursos suficientes para atender todos los intervalos de forma compatible. Se requiere determinar la cantidad mínima de recursos y como asignarlos a los intervalos (*Problema de Partición de Intervalos*).

3. Los intervalos están valorados y se busca determinar el subconjunto de intervalos compatibles de mayor suma de valores (*Problema de Despacho de Intervalos Ponderados*).

Problema de *Partición de Intervalos* (PPI) (1/3)

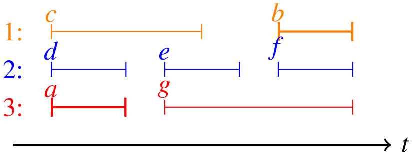
Esta variante del problema busca determinar la cantidad mínima de recursos (indistinguibles) que permite atender a todos los intervalos. Es decir se busca dividir el conjunto de intervalos (ej. clases) en recursos (ej. salones) de forma tal que no se superponen en cada recurso.

¿Qué solución podría tener la instancia siguiente?



Una solución es

Recurso: intervalos

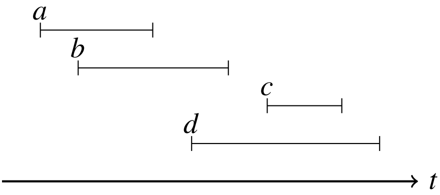


¿Es posible usar menos de tres recursos?

Problema de Partición de Intervalos (PPI) (2/3)

En cada instancia del PPI, la cantidad de recursos necesaria es al menos la cantidad máxima de intervalos que se superponen en el tiempo.
Esta cantidad, denotada h, es una cota mínima que toda solución debe tener.

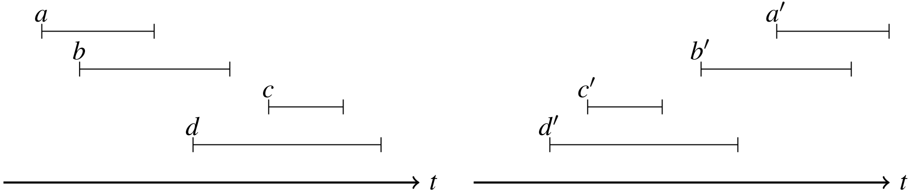
Dada la instancia del problema:



¿Cuál es su mínima cantidad de recursos necesarios, h?

Problema de Partición de Intervalos (PPI) (3/3)

El problema se puede resolver mediante algoritmos ávidos, seleccionando secuencialmente intervalos y asignándoles un recurso, $\{1, 2, ..., h\}$.
¿Qué regla de selección de intervalos permite resolver el problema?
Considerar la regla propuesta en las instancias:



Algoritmo ávido de resolución:
Se recorre el conjunto de intervalos ordenados por *tiempo de comienzo creciente*. A cada intervalo disponible se le asigna un recurso cualquiera al que ya no estén asignados otros intervalos que se superponen con él.

Problema de *Despacho de Intervalos Ponderados* (PDIP)

Es una generalización del Problema de Despacho de Intervalos (PDI) en la cual a cada intervalo $i \in \{1, ..., n\}$ se le asocia un valor $v_i > 0$.

¿Cómo determinar el subconjunto de intervalos compatibles de mayor suma de valores?

Notar que PDI es un caso especial de este, en el cual el valor de todos los intervalos es uno.

El algoritmo ávido para PDI (que selecciona el intervalo que finaliza más temprano) no funciona para PDIP (Ejercicio: determinar un contraejemplo).

Actualmente no se conoce un algoritmo ávido que resuelva el PDIP .

Técnicas de resolución: Programación dinámica, Programación entera.

¡ Gracias por su atención y participación !

Planificación y programación de procesos y operaciones en Introducción a la Ingeniería de Producción

Docente: *Carlos Testuri*

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación.
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República, Uruguay

2024