Señales Aleatorias y Modulación 2021

Cuestionarios de las clases teóricas

Procesos estocásticos: nociones básicas

Pregunta 1

Sea $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un proceso estocástico. Consideremos $n \geq 2$ fijo. Supongamos que podemos determinar la cdf conjunta de $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$, para cualquier n-tupla $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de instantes de tiempo. Entonces *(las respuestas no tienen por qué ser excluyentes):*

(a) El proceso está totalmente caracterizado.

(b) El proceso está parcialmente caracterizado (de acuerdo a lo que definido como tal en el curso).

(c) El proceso no está ni total ni parcialmente caracterizado.

Pregunta 2

Responder Verdadero o Falso.

1. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con X_n Bernoulli de parámetro $1/n$ independientes, NO es de segundo orden.
2. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con $X_n = nY_n$, con Y_n Bernoulli de parámetro 1/3 i.i.d., es de segundo orden.
3. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con $X_n = n(Y_n - 1)$, con Y_n Bernoulli de parámetro 1/2 i.i.d., NO es de segundo orden.
4. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con $X_n = n(Y_n - 1)$, con Y_n Bernoulli de parámetro $1/n$ independientes, es de segundo orden.
5. El proceso $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ tal que su media es nula para todo t, y $R(t_1, t_2) = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$, con $\delta(t)$ la delta de Dirac, es de segundo orden.
6. El proceso $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, i.i.d. con $X(t)$ Cauchy de centro 0 y parámetro de escala 1.0, NO es de segundo orden
7. El proceso de incrementos independientes $\pm An$ equiprobables, con A una constante y n el índice temporal, es de segundo orden.

Pregunta 3

1. *Responder Verdadero o Falso (las respuestas no tienen por qué ser excluyentes).* La función de autocorrelación $R(t_1, t_2)$ de un proceso real cualquiera:

   (a) Es una función simétrica en sus dos variables.

   (b) Es siempre positiva o nula.

   (c) Es máxima en $t_1 = t_2$.

   (d) Tiene un único máximo en $t_1 = t_2$.

2. *Responder Verdadero o Falso.* Todo proceso de autocorrelación finita es de segundo orden.

Pregunta 4

Responder Verdadero o Falso (las respuestas no tienen por qué ser excluyentes). Todo proceso totalmente caracterizado:

(a) Queda también caracterizado parcialmente.

(b) Es de segundo orden.

Pregunta 5

Responder Verdadero o Falso. Todo proceso cuya autocovarianza es nula para todo par de instantes de tiempo es de segundo orden.

Pregunta 6

Responder Verdadero o Falso.

1. Un proceso $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ i.i.d. con $X(t)$ V.A. gaussiana con media y varianza conocidas está totalmente caracterizado.
2. Consideremos un proceso $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ de variables gaussianas no independientes, idénticamente distribuidas, caracterizado parcialmente. Entonces el proceso también está caracterizado totalmente.

Procesos estocásticos estacionarios

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Todo proceso SSS al orden n es también SSS al orden m, con $m < n$.
2. Consideremos un proceso tal que $F_{t_1+5,t_2+5} = F_{t_1,t_2}$. Entonces podemos afirmar que es SSS al orden 2.
3. Todo proceso i.i.d. es SSS.
4. Si un proceso no es de segundo orden (i.e. $\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$), no puede ser SSS.
5. Todo proceso SSS es también WSS, siempre que sea de segundo orden.
6. Todo proceso WSS es también SSS.
7. Un proceso cuya varianza no es constante en el tiempo no puede ser estacionario (en ninguno de los dos sentidos).

Pregunta 2

Indique si el proceso es estacionarios en sentido amplio, estacionario en sentido estricto o no estacionario
Para los siguientes procesos, indique si son estacionarios en sentido amplio, estacionarios en sentido estricto o no estacionarios.

1. La temperatura promedio anual de la Tierra.
2. El zumbido de fondo de un avión viajando a velocidad crucero.
3. El movimiento de una pelota que rebota en el piso en caída libre (no en el vacío).
4. El sonido que produce una gotera.
5. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con X_n Bernoulli de parámetro $1/n$ independientes.

6. El proceso $\{X_n, n \geq 1\}$ con $X_n = nY_n$, con los Y_n i.i.d. Bernoulli de parámetro 1/2.
7. La onda binaria aleatoria vista en curso.
8. El paseo al azar visto en clase.
9. Un proceso gaussiano estacionario en sentido amplio.
10. El proceso $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ tal que su media es nula para todo t, y $R(t_1, t_2) = \sigma^2\delta(t_1 - t_2)$, con $\delta(t)$ la delta de Dirac (conocido como ruido blanco).
11. El proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, con X_n variables de Cauchy i.i.d.

Pregunta 3

Responder Verdadero o Falso.

1. Cualquier proceso definido como una transformación cualquiera de un proceso SSS es SSS.
2. Cualquier proceso WSS filtrado por un filtro lineal, invariante en el tiempo (LTI), es también WSS.
3. Un proceso de ruido blanco, filtrado pasabajo por un filtro LTI, no necesariamente produce un proceso WSS.
4. La media empírica de un proceso WSS es un estimador insesgado de su media.
5. La autocorrelación empírica de un proceso WSS es un estimador insesgado de su autocorrelación.

Potencia, PSD, proceso de Wiener, ruido blanco

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Para procesos WSS, la potencia promedio esperada y la potencia instantánea esperada son iguales.
2. Para procesos WS-cicloestacionarios, la potencia promedio esperada y la potencia instantánea esperada son iguales.
3. La Transformada de Fourier de la autocorrelación de un proceso WSS define una densidad espectral de la potencia porque es no negativa y su integral en el dominio de las frecuencias es igual a la potencia del proceso.

Pregunta 2

Salvo indicación explícita, responder Verdadero o Falso.

1. El ruido blanco es un proceso que existe en la naturaleza.
2. El ruido blanco $\{Z(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ tiene potencia finita.
3. El proceso de Wiener o movimiento Browniano modela ciertos fenómenos físicos que existen en la naturaleza.
4. *Elija una de las opciones.* El proceso de Wiener es: No estacionario / Solo WSS / Solo SSS / WSS y SSS.
5. El filtrado pasabajo con un filtro LTI estable de un ruido blanco produce un proceso WSS.
6. El proceso de Wiener se puede construir matemáticamente como límite de un random walk en tiempo continuo, haciendo tender a cero los intervalos de tiempo y la amplitud de los saltos de forma adecuada.

7. Los incrementos del proceso de Wiener entre dos instantes de tiempo cualesquiera t_1 y t_2 siguen una distribución gaussiana de media nula y varianza constante, independiente de t_1 y t_2.
8. Las trazas de un proceso de Wiener que no son continuas tienen probabilidad de ocurrencia nula.
9. Podemos interpretar al ruido blanco como un tren infinitamente denso de deltas de Dirac.
10. El ruido blanco $\{Z(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ derivado del proceso de Wiener es tal que las variables aleatorias $Z(t)$ son i.i.d. con distribución cualquiera.

Ergodicidad

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Los teoremas ergódicos establecen bajo qué condiciones los promedios sobre ensambles (i.e. sobre realizaciones) coinciden con los promedios sobre el tiempo para una realización dada.
2. El teorema de Wiener-Khinchin nos da una forma alternativa de definir la densidad espectral de potencia de procesos WSS, que coincide con la que definimos previamente en el curso.
3. Los teoremas ergódicos para la media de un proceso vistos en clase establecen condiciones para que el promedio temporal de una realización de un proceso WSS converja puntualmente a su media.
4. El proceso X_n definido como $X_n = Z$ para todo n, donde Z es una variable de Bernoulli de parámetro p, es ergódico en la media.
5. Todo proceso estocástico que es ergódico en la autocorrelación también lo es en la media.
6. Para extender los teoremas ergódicos para la media de un proceso WSS $X(t)$ a su autocorrelación, basta con aplicarlos a un proceso definido como $Z(t) = X(t)X(t + \tau)$.
7. La señal portadora con fase desconocida (de distribución uniforme) es ergódica en la media pero no en la autocorrelación.

Pregunta 2

Responder Verdadero o Falso.

1. Con la definición de autocorrelación para señales determinísticas vista en clase: la psd de una señal determinística, y la relación entre la psd a la entrada y a la salida de un filtro LTI, se definen de forma análoga que para procesos estocásticos WSS.
2. El teorema de Wiener-Khinchin nos da una forma de definir la psd de un proceso no estacionario. En esta definición, se considera una función de autocorrelación en donde la dependencia temporal se elimina promediando $\mathbb{E}\left[X(t)X(t + \tau)\right]$ en t.
3. La psd definida en el teorema de Wiener-Khinchin para procesos no WSS no vale para procesos WSS.

Muestreo de procesos WSS, señal PAM

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. El teorema del muestreo para procesos WSS de banda limitada en media cuadrática, asegura que si la psd de un proceso tiene soporte incluido en $(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T})$, si muestreamos sus realizaciones con período T o menor, el proceso muestreado interpolado por senos cardinales centrados en la muestra, con cruces por cero cada T, reconstruye perfectamente el proceso original, en el sentido de la media cuadrática.

2. El teorema del muestreo para procesos WSS de banda limitada en media cuadrática, asegura que si muestreamos el proceso a una frecuencia superior al doble de la frecuencia máxima de su psd, todas las trazas o realizaciones del proceso se pueden reconstruir perfectamente a partir de sus muestras.
3. La psd del proceso muestreado es una señal periódica que surge de periodizar la psd del proceso original en tiempo continuo a intervalos de $1/T$, donde T es el tiempo entre muestras.

Pregunta 2

1. En el proceso PAM, cualquiera sea la distribución de probabilidad del retardo, el proceso es WSS.
2. Cualquier proceso PAM siempre tiene Diracs con asiento en múltiplos de $1/T$.
3. El espectro del proceso PAM construido con un bloqueador de orden 1 decae más rápido que el que se obtiene con un bloqueador de orden 0.

Cuantización, SNR, cuantización y sobremuestreo

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Consideremos un cuantizador que asigna valores discretos a los valor que toma una variable aleatoria $X(t_0)$ a valores continuos, de forma tal que a todo valor en el intervalo $(-q/2, q/2]$ se le asigna el valor q. Suponiendo que los valores que toma $X(t_0)$ no excede el rango del cuantizador, entonces la pdf de la variable cuantizada $X_q(t_0)$ se puede escribir como un peine de Diracs con asientos en múltiplos de q, ponderado por le resultado de convolucionar la pdf del proceso continuo con una función indicatriz del intervalo de cuantización correspondiente, de amplitud $1/q$.
2. El teorema de cuantización asegura que si paso de cuantización q es tal que la función característica de X tiene soporte incluido en $(-\pi/q, \pi/q)$, entonces podemos reconstruir perfectamente su pdf a partir de una interpolación con senos cardinales con cruces por cero en múltiplos de $2\pi/q$.
3. Si la cuantización con paso q es suficientemente fina como para que se cumpla el teorema de cuantización para toda $X(t)$, entonces, salvo por un conjunto de realizaciones de medida nula, podemos reconstruir el proceso $X(t)$ a partir del proceso cuantizado, interpolando las muestras cuantizadas por un seno cardinal con cruces por cero en múltiplos de π/q.
4. Si estamos en las condiciones del teorema de cuantización, entonces el modelo simplificado de ruido aditivo uniforme resulta en un proceso exactamente igual que al que se obtiene a la salida del cuantizador.
5. Si la función característica es tal que su soporte está incluido en $(-2\pi/q + \epsilon, 2\pi/q - \epsilon)$ con ϵ pequeño, pero no en $(-\pi/q, \pi/q)$, entonces podemos recuperar los momentos de orden arbitrariamente elevado de la pdf original.
6. Supongamos que sabemos que la pdf de la variable $X(t_0)$ del proceso en tiempo continuo es gaussiana, de media y varianza desconocidas. Entonces, si el soporte de su función característica está incluido en $(-2\pi/q + \epsilon, 2\pi/q - \epsilon)$ con ϵ suficientemente pequeño, podemos recuperar la pdf de $X(t_0)$ a partir de sus muestras cuantizadas con paso q.

Pregunta 2

Responder Verdadero o Falso.

1. De manera general, para una señal contaminada con ruido aditivo cualquiera, se define la relación señal a ruido como el cociente entre la potencia de la señal sin ruido y la potencia del ruido.
2. Muestrear temporalmente una señal en tiempo continuo de banda limitada a frecuencias mayores de la frecuencia de Nyquist no presenta ventajas en lo que refiere a su reconstrucción, si esta no es sometida a una etapa de cuantización. Sin embargo, si la señal se cuantiza, el sobremuestreo resulta beneficioso en términos de la SNR de cuantización.

Cuantización no uniforme, compansión, dithering, noise shaping

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Cuando la pdf de la variable aleatoria X presenta un factor de cresta elevado, es mejor considerar una estrategia de cuantización no uniforme que una cuantización uniforme.

2. La cuantización que surge de minimizar la varianza del error de cuantización (suponiendo que esta varianza es finita) mediante el algoritmo de Lloyd-Max no es única.

3. Cuando la pdf de X es uniforme, el algoritmo de Lloyd-Max produce una cuantización uniforme. *Sugerencia:* ver si es cierto o no que los valores cuantizados $y_j = \frac{\int_{b_{j-1}}^{b_j} x\, f_X(x)\, dx}{\int_{b_{j-1}}^{b_j} f_X(x)\, dx}$ valen $y_j = \frac{b_j + b_{j-1}}{2}$. Si esto fuera cierto, tendríamos que los y_j están en el medio de cada intervalo de cuantización, y como además los bordes de los intervalos de cuantización siempre están en el medio de los y_j (recordar que tenemos que $b_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$) tendríamos que todo está equi-espaciado.

4. Cuando la cantidad de niveles de cuantización M es muy grande, el algoritmo de Lloyd-Max nos da una cuantificación que se acerca a la cuantificación uniforme. *Sugerencia:* considerar que para M suficientemente grande, el valor de $f_X(x)$ en cada intervalo de cuantización es constante, y proceder como en la pregunta anterior.

Pregunta 2

Salvo especificado explícitamente, responder Verdadero o Falso.

1. La función de compansión $z(x) = \frac{X_{\max}}{\alpha} \operatorname{sign}(x) \ln(|x|)$ *(elija la opción adecuada)*:

   a) Es una buena elección ya que, en general, permite reducir la varianza del ruido de cuantización y es independiente de f_X.

   b) Permite obtener la SNR_{cuant} óptima para toda f_X.

2. Si X tiene distribución $\mathcal{U}[-X_{\max}, X_{\max})$, i.e. $f_X(x) = \frac{1}{2X_{\max}} \mathbb{I}\{|x| \leq X_{\max}\}$, entonces la función de compansión que minimiza la varianza del error de cuantización es $z(x) = x\, \mathbb{I}\{|x| \leq X_{\max}\}$, y la varianza obtenida es la varianza del ruido de cuantización uniforme $\frac{q^2}{12} = \frac{X_{\max}^2}{3M^2}$.

Pregunta 3

Responder Verdadero o Falso.

1. La técnica de dithering permite mejorar la calidad de la cuantización ya que conduce a SNRs más elevados.

2. Cuando la cuantización es gruesa (en términos de la CDF de la variable original X), el modelo simplificado deja de ser válido. Sin embargo, al sumar un ruido d independiente de la señal (dither), el soporte de la CDF de $X + d$ se reduce, haciendo que el modelo simplificado para $X + d$ pase a ser válido.

3. La técnica de *noise shaping* permite manipular el dither para hacerlo menos perceptible.

Filtro apareado, aplicación a un sistema básico de comunicación digital

Pregunta 1

Responder Verdadero o Falso.

1. Consideremos un pulso dado $v(t)$, y una señal aleatoria en donde la información se codifica mediante la presencia o ausencia de dicho pulso. Esta señal está contaminada con ruido $N(t)$. El filtro apareado es el filtro LTI que, aplicado a la señal contaminada con ruido, produce a la salida la SNR máxima entre todos los filtros LTI, para todo instante de tiempo.

2. Al analizar la expresión del filtro apareado al pulso $v(t)$, vemos que el objetivo del filtro es atenuar la salida para aquellas frecuencias donde domina el ruido, y amplificarla para aquellas frecuencias en donde domina el pulso.

3. El filtro $h(t)$ apareado al pulso $v(t)$ es siempre proporcional al pulso invertido en el tiempo y trasladado, es decir, $h(t) \propto v(t_0 - t)$.

Pregunta 2

1. En el sistema de comunicación digital básico visto en clase, se considera una señal PAM con pulso conformador $v(t)$ de duración T, donde los '0' lógicos se codifican multiplicando el pulso por a_0 y los '1' por a_1. En recepción se utiliza un filtro apareado a $v(t)$, con muestreo y comparación contra umbral óptimo a intervalos $t_s + nT$. La gran ventaja de este sistema es que su performance no se degrada si hay pérdida de sincronismo.

2. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. Los '0' lógicos se codifican multiplicando el pulso por a_0 y los '1' por a_1. Cuanto mayor es la potencia del ruido y cuanto menor es $|a_0 - a_1|$, mayor es la probabilidad de error por bit.

3. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. Los '0' lógicos se codifican multiplicando el pulso por a_0 y los '1' por a_1. Si se duplica la potencia del ruido introducida por el canal, puedo obtener la misma probabilidad de error por bit utilizando pulsos conformadores del doble de energía.

4. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. Los '0' lógicos se codifican multiplicando el pulso por a_0 y los '1' por a_1, y el pulso conformador tiene energía unitaria. El umbral óptimo siempre se encuentra equidistante de a_0 y a_1.

5. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. Los '0' lógicos se codifican multiplicando el pulso por a_0 y los '1' por a_1, y el pulso conformador tiene energía unitaria. Llamemos p a la probabilidad de enviar un '0'. Entonces, si p aumenta, el umbral óptimo se corre hacia a_0.

6. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. Cuanto mayor es la SNR en recepción, menor es la probabilidad de error de bit.

7. Consideremos el sistema básico de comunicación digital visto en clase, para símbolos binarios (bits), con canal que introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo. La elección de un filtro apareado como filtro de recepción se debe a que maximiza la SNR en recepción, lo cual a su vez minimiza la probabilidad de error por bit.

Filtro de Wiener

Responder Verdadero o Falso.

1. El filtro de Wiener de respuesta al impulso $h(t)$ es el filtro LTI que, aplicado al proceso WSS observado $U(t)$, produce el proceso $\hat{V}(t)$ más cercano al proceso no observado WSS de interés $V(t)$, en el sentido del error cuadrático medio.

2. El filtro de Wiener actúa atenuando el proceso observado $U(t)$ en aquellas frecuencias en donde el ruido domina a la señal, y amplificando aquellas frecuencias donde el proceso de interés $V(t)$ domina al ruido.

3. Para el filtro de Wiener, la salida $\hat{V}(t)$ producida a partir de la entrada $U(t)$ (proceso observado WSS) cumple que $R_{\hat{V}U}(t) = R_{VU}(t)$, donde $V(t)$ es el proceso WSS no observado de interés.

4. Sea $g(t)$ la respuesta al impulso de un filtro LTI, conocida, tal que $\hat{g}(f)$ no se anula nunca. Supongamos que la relación entre el proceso observado y el no observado es $U(t) = g * V(t)$. Entonces el filtro de Wiener coincide con el filtro inverso $1/\hat{g}(f)$ y podemos recuperar el proceso $V(t)$ perfectamente.

5. Consideremos que el procesos observado es $U(t) = g * V(t) + N(t)$, con $\hat{g}(f) = 0$ para ciertos valores de f, y con $N(t)$ un ruido blanco, independiente de $V(t)$, de potencia σ^2 (no nula). Entonces, el filtro de Wiener no está definido para ciertas frecuencias.

6. Supongamos que el proceso observado es $U(t) = V(t) + N(t)$. Entonces, cuanto más correlacionado esté $N(t)$ a $V(t)$, mejor será la estimación $\hat{V}(t)$ que nos da el filtro de Wiener.