

Algoritmo:

Recorremos la carretera empezando desde el oeste, avanzamos hacia el este hasta el momento en que haya una casa c que esta a exactamente 4 kilometros a la izquierda de donde estamos ubicados. Aquí ponemos una estación.

Luego borramos todas las casas que son cubiertas por esta estación y continuamos este mismo proceso con las demás casas, avanzamos hasta encontrar una nueva que esté a 4 kilometros a la izquierda de donde estamos parados y ponemos nuevamente otra estación, así hasta terminar el camino, si en este punto queda alguna casa sin ser cubierta, ponemos una estación al final del camino.

Otra manera de ver esto es:

para cualquier punto del camino, definimos su posición como el número de kilometros en que esta ubicado empezando desde el oeste. Colocamos la primera estación en el punto mas lejano del comienzo de la ruta, lo llamamos S_1 , que cumple de que todas las casas entre entre el punto 0 y el punto S_1 , estén cubiertas por S_1 .

En general, luego de haber puesto $\{S_1, S_2, \dots, S_i\}$, colocamos la estación $i+1$ en la posición mas alejada de S_i , con la propiedad de que todas las casas entre S_i y S_{i+1} , estén cubiertas justamente por S_i y S_{i+1} .

El algoritmo es correcto, sugiero también escribirlo de manera más compacta en pseudocódigo.

Corección:

Sea $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ el conjunto de las posiciones en la cual el algoritmo puso una estación.

Sea $O = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ el conjunto de las posiciones en las que hay una estación en una solución optima, estas están en orden creciente, de oeste a este.

Queremos ver que $k=m$.

Demostraremos que $S_i \geq t_i$ para cada i , osea que nuestra solución S , está siempre por delante de la solución óptima O .

Lo demostraremos por inducción.

Para $i=1$ se cumple, ya que nuestro algoritmo, avanza en el camino lo más que puede hacia el este para poner la primera estación, si avanzáramos un poco más, habría una casa, la que en el algoritmo se denomina c , que no tendría cobertura.

El paso base es correcto

Asmimos ahora, que esto se cumple para un valor $i \geq 1$, esto significa que las primeras i estaciones $\{S_1, \dots, S_i\}$ cubren todas las casas cubiertas por las primeras i estaciones $\{t_1, \dots, t_i\}$, ya que para todo $k \leq i$, se cumple que $S_k \geq t_k$ (aquí diría que esto se cumple puesto que la solución devuelta por el algoritmo no deja casas sin cubrir y todas las que están a la izquierda de t_i están incluidas en las que están a la izquierda de S_i).

Entonces, si agregamos t_{i+1} , al conjunto $\{S_1, \dots, S_i\}$, no dejaremos ninguna casa entre S_i y t_{i+1} sin cobertura,

pero el paso $i+1$ del algoritmo que construimos, elige S_{i+1} para que tenga la mayor distancia posible con la condición de cubrir todas las casas entre S_i y S_{i+1} , entonces tenemos que $S_{i+1} \geq t_{i+1}$.

Aquí concluyen la inducción.

Finalmente si $k > m$, entonces $\{S_1, \dots, S_m\}$, no cubriría todas las casas, pero como $S_m > t_m$, entonces $\{t_1, \dots, t_m\}$ que es la solución óptima O , tampoco lo haría, y esto es absurdo, ya que O justamente era una solución. **Correcta la conclusión.**