Matemática Discreta I

Examen

Miércoles 7 de febrero de 2018

El examen se aprueba con 60 puntos o más.

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 40 puntos).
Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 Hallar $a_n = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}$.

A. $a_n = 2^{n-1}$

B. $a_n = n2^n - 1$

C. $a_n = n2^{n-1}$

D. $a_n = 2^n - 1$

La solución correcta es la **C**: $a_n = n2^{n-1}$.

Como $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$, entonces si derivamos obtenemos: $((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1} = (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i)' = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} x^{i-1}$.

O sea:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} x^{i-1}.$$

Para encontrar $\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}$ evaluamos la igualdad anterior en $x = 1$ y obtenemos

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

EJERCICIO 2 Se considera un orden total $(E, \leq)$ siendo E un conjunto con más de un elemento. Se define la siguiente relación en $P(E) \setminus \{\emptyset\}$: dados dos subconjuntos X, Y de E diremos que

$$X \mathcal{R} Y \text{ si } \forall x \in X, \forall y \in Y,\ x \leq y.$$

Entonces:

A. R es transitiva y simétrica pero no reflexiva,

B. R es transitiva y antisimétrica pero no reflexiva,

C. R es de orden,

D. R es de equivalencia.

La solución correcta es la **B**: R es transitiva y antisimétrica pero no reflexiva.

Observemos primero que la relación no es reflexiva. Como E tiene al menos dos elementos podemos considerar $X = \{x_1, x_2\} \subseteq E$, con $x_1 \neq x_2$. Como el orden es total podemos asumir que $x_1 < x_2$.

Afirmación: El conjunto X no puede estar relacionado con X.
Asumamos $X\mathcal{R}X$. Eso implicaría por la definición de la relación que $x_1 \leq x_2$ y $x_2 \leq x_1$. Como $(E, \leq)$ es un orden entonces obtenemos que $x_1 = x_2$, absurdo, pues son elementos distintos.

Observemos ahora que la relación es transitiva. Sean X, Y, Z subconjuntos de E, y asumamos que $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}Z$. Entonces $x \leq y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$, pero también $y \leq z,\ \forall y \in Y, \forall z \in Z$. Luego $x \leq z,\ \forall x \in X, \forall z \in Z$, por la transitividad de la relación de orden $(E, \leq)$.

Por lo visto hasta ahora se descartan las dos últimas opciones. Veamos ahora que la relación no es simétrica. Consideremos los subconjuntos de E: $Y = \{y\}$ y $Z = \{z\}$, con $y \neq z$ elementos de E. Podemos asumir $y < z$ por las mismas consideraciones que hicimos antes. Entonces, por definición, $Y\mathcal{R}Z$, pero no es cierto que $Z\mathcal{R}Y$. Concluimos que la única opción posible es la B.

Probemos para completar argumentos que la relación es antisimétrica. Si $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}X$, entonces, por la transitividad, $X\mathcal{R}X$ e $Y\mathcal{R}Y$. Esto solo puede suceder si X e Y tienen un solo elemento (sino obtendríamos el absurdo de antes, cuando argumentamos que la relación no es reflexiva). O sea $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. Teníamos que $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}X$, entonces, $x \leq y$ e $y \leq x$. Luego $x = y$, y por lo tanto $X = Y$ (los conjuntos coinciden). Hemos porbado que la relación es antisimétrica.

EJERCICIO 3 ¿Cuántas grafos no isomorfos de 6 vértices, no conexos, y sin ciclos hay?

A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14

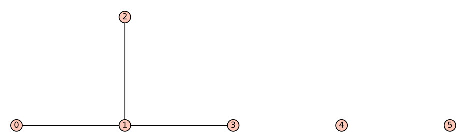
<u>La solución correcta es la **D**: 14</u>.

Ofrecemos la lista de los 14 grafos:

0 1 2 3 4 5

0 1 2 3 4 5

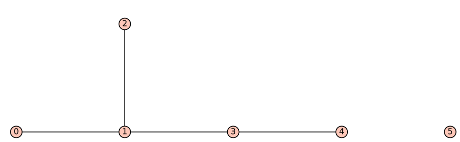
0 1 2 3 4 5

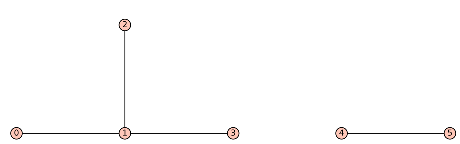

2
0 1 3 4 5

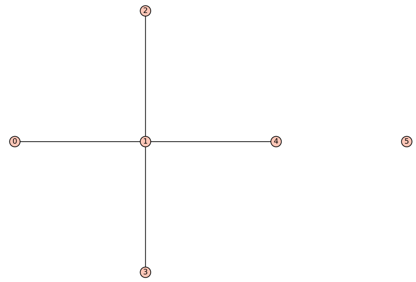
0 1 2 3 4 5

0 1 2 3 4 5

0 1 2 3 4 5


2
0 1 3 4 5


2
0 1 3 4 5



0
1
2
3
4
5

EJERCICIO 4 El coeficiente de x^4 de

$$\frac{1}{(1+x)^3(1-2x)^2}$$

es:

A. 31 **B.** 303 **C.** 79 **D.** 95

La solución correcta es la **A**: 31.

Tenemos que $\dfrac{1}{(1+x)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con a_n =CR$(3,n) \times (-1)^n$; y $\dfrac{1}{(1-2x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, con b_n =CR$(2,n) \times (2)^n$.

Entonces $\frac{1}{(1+x)^3(1-2x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es la convolución de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por lo tanto $c_4 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} a_i \times b_{4-i} = \sum_{i=0}^{4} CR(3,i) \times CR(2,4-i) \times (-1)^i \times 2^{4-i} = 31$.

EJERCICIO 5 Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \times A \to A$ hay que verifiquen $f(i,j) \neq i$ con $i,j = 1,2,3,4$?

A. 12^4 **B.** 3^{16} **C.** $16 \cdot 4$ **D.** 4^3

La solución correcta es la **B**: 3^{16}.

Para cada elemento $(i,j) \in A\times A$, tenemos tres opciones par su imagen por f, pues la única condición es que $f(i,j) \neq i$. En $A \times A$ tenemos 16 elementos. O sea que tenemos 3^{16} posibles funciones.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 60 puntos)

Justifique su respuesta en cada uno de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6 (30 puntos)
Sea $G = (V,E)$ un grafo. Se define diám(G) =máx $\{d(v_1,v_2)\ /\ v_1,v_2 \in V\}$.

a. Hallar diám(C_n), siendo C_n el ciclo de n elementos, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución: si n es par, diám$(C_n) = \frac{n}{2}$; si n es impar, diám$(C_n) = \frac{n-1}{2}$.

b. Sea $T = (V,E)$ un árbol (no trivial, o sea con más de un vértice).

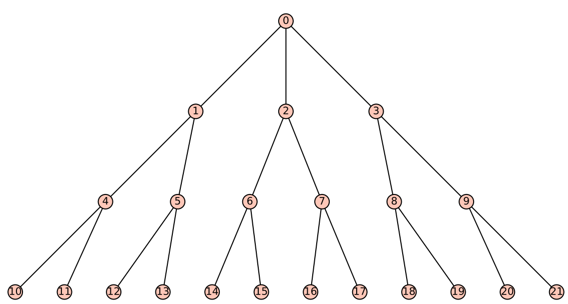
i. Probar que T siempre tiene dos o más hojas.

Solución: Fue visto en Teórico. Ofrecemos aquí una posible demostración. Recordar que $\displaystyle\sum_{v\in V} gr(v) = 2\times e$, siendo $e = |E|$. También recordemos que para un árbol $\nu = e+1$ siendo $\nu = |V|$.

Asumamos que el árbol no tiene hojas o tiene sólo una hoja. Sea v_1 uno de los vértices de menor grado. Si hay una hoja sería $gr(v_1) = 1$, sino sería $gr(v_1) = 2$. Observamos que la suma de los grados de los vértices: $\sum_{v \in V} gr(v) = gr(v_1) + \sum_{v \neq v_1} gr(v) \geq 1 + 2(\nu - 1) = 1 + 2e$, absurdo. Luego el ártbol tiene dos hojas o más.

ii. Probar que diám(T) se alcanza siempre entre dos hojas del árbol.
Solución: Recordar que en un árbol entre cada par de vértices hay uno y solo un camino que los unen. Este concepto será fundamental en esta pregunta y en la siguiente. Asumamos que el diámetro se alcanza entre dos vértices v, w, y uno de ellos (supongamos w) no es una hoja. Notamos diám$(T) = n$. Luego existe un camino (δ) de largo n entre v y w y no hay un camino más corto entre estos vértcies. Como $gr(w) \geq 2$ el camino δ se puede extender y se obtiene un camino más largo entre v y otro vértice z. Como en un árbol, entre cada par de vértices hay un solo camino, el único camino entre v y z es más largo que δ, con lo cual el diám(T) sería mayor que n, asburdo. La contradicción proviene de asumir que w no es una hoja.

iii. Hallar la cantidad máxima de vértices que tiene un árbol de diámetro 6 y tal que $gr(v) \leq 3$, para todo $v \in V$.
Solución: Hemos probado que el diám(T) se alcanza entre dos hojas v, w, por un camino $\delta : v = x_0, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = w$. Al vértice central de ese camino, x_3 lo notaremos $x_3 = r$, raíz del árbol. Obsérvese que $\mathrm{d}(r, z) \leq 3$, para todo $z \in V$. Caso contrario, se obtendría un camino en T de largo mayor que 6, contradiciendo que el diámetro del árbol es 6. Quiere decir que todos los vértices están a distancia menor o igual a 3 de la raíz r.
Por otro lado, para maximizar el número de vértices, el árbol debe poseer todos los vértices que no son hojas con grado 3.
La cantidad de vértices es, sumando: $|V| = 1 + 3 + 2 \times 3 + 2 \times 6 = 22$.



EJERCICIO 7 (30 puntos)
En el Club Canard de Villa Emprestada, se ofrecen variados tipos de clases: *Spinning, Local con barras, Stretching, Todoup*, etc. En la clase *Todoup*, el profesor decidió hacer gala de la variedad de implementos de trabajo, así que trajo para la jornada: ***c**olchonetas, **p**elotas de arena, **m**ancuernas, **s**teps, **b**andas elásticas, **t**obilleras.* Asistieron dieciocho alumnos.

a. Como primer actividad el profesor les pide que se distribuyan los dieciocho alumnos en las 6 zonas de trabajo de la clase (**c, p, m, s, b, t**) de tal forma que en cada actividad haya al menos un alumno para utilizarla. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los alumnos?

Solución:
Son 18 alumnos que se distribuyen en 6 zonas de trabajos (todas diferentes). Como no pueden quedar zonas de trabajo vacías, el modelo que representa esto es: Sob(18,6), o sea el número de funciones sobreyectivas con dominio el conjunto de alumnos (son 18) y codominio el conjunto de zonas de trabajo (son 6).

b. Como la presentación de la actividad anterior no funcionó, les pidió que se pusieron en 6 grupos de 3 alumnos, cada grupo alrededor de una de las 6 actividades de trabajo (**c, p, m, s, b, t**). ¿De cuántas formas se pueden organizar ahora los alumnos?

Solución:
Hay $\binom{18}{3}$ casos posibles de ternas de alumnos para trabajar en las colchonetas. Luego tenemos

$\binom{15}{3}$ casos posibles de ternas de alumnos para trabajar con pelotas de arena. Así continuamos y obtenemos: $\frac{18!}{(3!)^6}$.
Una segunda forma de obtener el mismo resultado es interpretando con el siguiente modelo: pretendemos una palabra de 18 letras, repetidas tres veces cada una de las letras, **c, p, m, s, b, t**. En total: $\mathrm{P}^{18}_{3,3,3,3,3,3} = \frac{18!}{(3!)^6}$.

c. Para la parte final de la clase, hay que estirar muchachos: ¡fundamental! Por eso el profesor trajo nueve colchonetas, todas iguales, y les pidió que se pusieran en grupos, sin dejar colchonetas libres. ¿En este caso de cuántas formas se pueden distribuir los alumnos?

Solución:
El modelo ahora es similar al del ítem **a.** con la diferencia que ahora en el "codominio" los elementos son indistiguibles (y cambia el número de zonas de trabajo). Dejó de ser el modelo de funciones sobreyectivas y aparece el modelo del número de Stirling de segunda especie.
Resultado

$$\mathrm{S}(18,9) = \frac{\mathrm{Sob}(18,9)}{9!}.$$

d. Nuevamente la actividad se desordenó, y el profesor les pidió que se pusieran en nueve grupos de dos personas. ¿De cuántas formas se pueden organizar ahora los alumnos?

Solución: Con el mismo modelo que el ítem **b.**, pero con la diferencia que las actividades no son distinguibles (y hay 9 zonas de trabajo). O sea:

$$\frac{18!}{2!^9} \times \frac{1}{9!}.$$