Ejercicio 6

Calcular cuántas permutaciones de los dígitos 123456789 cumplen que:

a) Ningún digito está en su posición original

Solución:

Determinemos los siguientes conjuntos $\mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $\mathcal{B} = \{D_1, \dots, D_9\}$. Un conjunto representa los dígitos del 1 al 9 y el otro conjunto representa las posiciones de esos dígitos. En esta parte nos aclaran específicamente que ningún digito debe de estar en su posición original, esto lo podríamos traducir en que $f(i) \neq D_i \therefore$ trataremos de contar todas las funciones que cumplen esta condición usando el P.I.E.

Para comenzar contaremos todas las funciones biyectivas que cumplan que todas van a su posición original, en este caso tendríamos que $|\mathcal{U}| = 9!$

Ahora la condición a establecer seria c_i : el digito i va a la posición d_i $(f(i) = i) \rightarrow \overline{c}_i : f(i) \neq i$ lo que efectivamente queremos.

Ahora observemos que $n(c_1) = (9-1)! = 8!$ ya que estamos dejando una función biyectiva fija y observando como son todas las demás, en otras palabras, dejamos el primer digito en la posición numero uno y se permutan todos los demás dígitos. Análogamente $n(c_1c_2) = (9-2)! = 7!, n(c_1c_2c_3) = (9-3)! = 6! \dots$ y así seguimos hasta cubrir todos los casos.

Al final por simetría en el problema tenemos que:

$$n(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \dots, \overline{c}_9) = 9! - C_1^9 \cdot 8! + C_2^9 \cdot 7! - C_3^9 \cdot 6! + \cdots + C_9^9 \cdot 0!$$

Esta cantidad es igual a cantidad los desordenes de tamaño 9, usando lo visto en el teórico el resultado es el siguiente:

$$d_9 = 9! \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Usando la aproximación:

$$d_9 = \left[\frac{9!}{e}\right] \cong 133496$$

b) Los pares no están en su posición original

En este caso tendríamos 4 condiciones estas serían:

- $n(c_i)$: el digito $2(i)$ va a su posición $d_{2(i)}$ con $i \in [1,4]$
- $n(c_ic_j)$: el digito $2(i)$ y $2(j)$ va a su posición $d_{2(i)}$ y $d_{2(j)}$ con $1 \leq i < j \leq 4$

Y así continuamos hasta abarcar con todas las condiciones. Lo importante de observar en esta parte del ejercicio es que:

1- Se presenta simetría en las 4 condiciones presentadas
2- El resultado no será idéntico al anterior, o sea, no serán contar desordenes

El punto numero dos es muy importante ya que, los desordenes de tamaño n abarcan todos los elementos del codominio, en este caso tenemos 4 condiciones y no 9.

Determinemos las cantidades descritas anteriormente:

- $|n(c_i)| = C_1^4 \cdot 8!$
- $\left|n\left(c_i c_j\right)\right| = C_2^4 \cdot 7!$
- $\left|n\left(c_i c_j c_k\right)\right| = C_3^4 \cdot 6!$
- $|n(c_1 c_2 c_3 c_4)| = C_4^4 \cdot 5!$

Al final el resultado es el siguiente:

$$n(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_3, \overline{c}_4) = 9! - C_1^4 \cdot 8! + C_2^4 \cdot 7! - C_3^4 \cdot 6! + C_4^4 \cdot 5! = 229080$$

c) Los pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1,2,3 y 4 en algún orden.

Esta tarea se puede dividir en 2 etapas, la primera es contar todas las permutaciones donde los pares no están en su posición original, lo cual ya esta calculado en la parte b), luego la segunda etapa seria ver cuantas permutaciones tengo disponibles cuando tengo los dígitos 1,2,3,4 en algún orden.

Observemos la etapa II, en este caso 4 de las 9 posiciones son ocupados por los dígitos 1,2,3,4, quedándonos 5 lugares disponibles, por lo tanto, tenemos para cada uno de los 6 casos disponibles (regla del producto) $6 \times 5! = 720$ formas de hacerlo. Ahora observemos que si a esta cantidad la nombramos como $n(c_5)$ siendo la condición c_5 **:** los primeros 4 dígitos son precisamente 1,2,3,4 en algún orden, $n(c_5 \cap \overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4) = \phi$ (es disjunto) $\therefore |n(n_5 \cap \overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4)| = |n(c_5)| + |n(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_3, \overline{c}_4)| = 229080 + 720 = 229800$