

Ejercicio 7

Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites, sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no puede haber perros ni gatos en el mismo escondite?

Solución:

En este problema podemos construir dos conjuntos $\mathcal{A} = \{g_1, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ (conjunto mascotas) y $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ (conjunto escondite)

La idea es asignarle a cada animal exactamente un escondite donde todo escondite será ocupado, esto lo podemos ver como funciones sobreyectivas de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Si vamos a usar el P.I.E necesitamos determinar el universo \mathcal{U} y su cantidad, en este caso tenemos 8 elementos que tienen que parar en los 4 escondites $\therefore |\mathcal{U}| = \text{sob}(8, 4)$.

Ahora determinemos las condiciones:

- c_i : el gato l y el perro k están en el mismo escondite

$l \in [1, 2]$ y $k \in [1, 6]$

En este caso tenemos 6 formas de agrupar g_1 con alguno de los perros y 6 formas más de agrupar g_2 con alguno de los perros, ya que no podemos hacer esta tarea de manera simultánea, por regla de la suma tenemos un total de 12 formas de agrupar estos gatos con alguno de los perros.

Ahora bien, la condición c_i se puede cumplir mediante dos etapas:

- La primera es dejando un perro y un gato en alguno de los 4 escondites, pero en esta etapa pueden ir más de un perro y un gato en el ese mismo escondite, en este caso tendremos una cantidad igual a $\text{sob}(6, 4)$
- La segunda es dejando un perro y un gato en alguno de los 4 escondites, pero ahora, no podrán entrar más perros y gatos en ese escondite, por lo tanto, tendremos una cantidad igual a $\text{sob}(6, 3)$

Por regla de la suma $\text{sob}(6, 4) + \text{sob}(6, 3)$. Finalmente, por regla del producto tendremos un total de $12(\text{sob}(6, 3) + \text{sob}(6, 4))$.

Ahora definamos la condición:

- $c_i c_j$: el gato l y el perro k están en el mismo escondite y además el gato r y el perro h están el mismo escondite

En este caso 6 maneras de agrupar los pares gatos y perros. Como pensamos en las dos etapas anteriores tenemos que aquí:

- La primera etapa es dejando el primer par en un escondite y el segundo par en otro, admitiendo que estén más de un perro en ese escondite, por lo tanto la cantidad es igual a $\text{sob}(4, 4)$
- La segunda etapa es dejando el primer par en algún escondite, no admitir más mascotas en ese lugar, poner el segundo par en otro escondite, y llenar los escondites restantes, en este caso tendríamos una cantidad igual a $\text{sob}(4, 3)$

- La tercera etapa sería dejar el primer par en algún escondite, el segundo par en otro escondite, y **clausurarlos**, o sea, no dejar entrar a más animales ahí, por lo tanto, tendríamos una cantidad igual a $sob(4,2)$

Finalmente (y como se razono anteriormente) tendríamos una cantidad igual a $6(sob(4,4) + sob(4,3) + sob(4,2))$

Agrupando todos los términos y usando P.I.E tendríamos que:

$$n(\overline{c_1}, \overline{c_2}) = sob(8,4) - [12(sob(6,3) + sob(6,4))] + 6(sob(4,4) + sob(4,3) + sob(4,2))$$

Calculemos estos términos:

$$sob(8,4) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i C_i^4 (4-i)^8 = (4)^8 - 4(3)^8 + 6(2)^8 - 4(1)^8 = 40824$$

$$sob(6,4) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i C_i^4 (4-i)^6 = (4)^6 - 4(3)^6 + 6(2)^6 - 4 = 1560$$

$$sob(6,3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_i^3 (3-i)^6 = (3)^6 - 3(2)^6 + 3(1)^6 = 540$$

$$sob(4,4) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i C_i^4 (4-i)^4 = (4)^4 - 4(3)^4 + 6(2)^4 - 4 = 24$$

$$sob(4,3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_i^3 (3-i)^4 = (3)^4 - 3(2)^4 + 3 = 36$$

$$sob(4,2) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i C_i^2 (2-i)^4 = (2)^4 - 2(1)^4 = 14$$

$$n(\overline{c_1}, \overline{c_2}) = 40824 - [12(540 + 1560)] + 6(24 + 36 + 14) = 16068$$