Montevideo, 19 de junio del 2024

NOTACIONES DE GRAFOS

Es intención de este curso y de toda la etapa de Estabilización de MD1, compatibilizar la notación de grafos, en lo posible, con las notaciones y definiciones que están presentes en el libro Matemática Discreta, de Grimaldi.

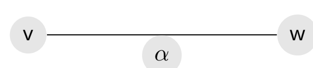
En ese sentido el texto que sigue propone algunos cambios menores en las definiciones básicas de Grafos, que serán usadas durante este curso.

1 Definiciones y notaciones

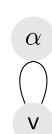
Definición 1.1 (Grafo) *Un grafo no dirigido es una terna* $G = (V, E, \text{ext})$*, donde:*

- V *es un conjunto no vacío,* (representan los vértices)*;*
- E *es un conjunto (puede ser vacío o no),* (representan las aristas)*;*
- *ext*: $E \to V^{(1,2)}$*, es una función con dominio las aristas, y codominio* $V^{(1,2)} = \{\{v, w\} \ / \ v, w \in V\}$*, el conjunto de conjuntos de uno (si* $v = w$*) o dos (si* $v \neq w$*) vértices.*

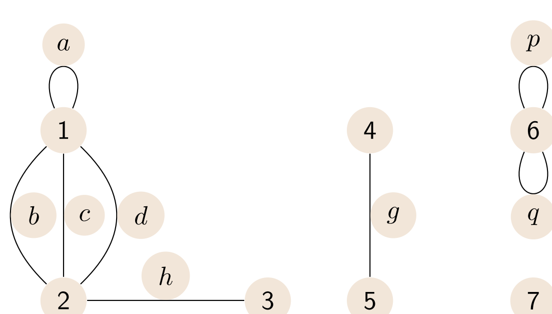
Así, si $\alpha \in E$ *es una arista,* *ext*$(\alpha) = \{v, w\}$*, decimos que* v *y* w *son los* **extremos** *de* α*:*



Cuando $v = w$ *decimos que la arista* α *es un* **lazo***:*



Ejemplo*: Se tiene un conjunto de vértices* $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *y un conjunto de aristas* $E = \{a, b, c, d, h, g, p, q\}$*, con* *ext*$(a) = \{1\}$*,* *ext*$(b) = \{1, 2\}$*,* *ext*$(c) = \{1, 2\}$*,* *ext*$(d) = \{1, 2\}$*,* *ext*$(h) = \{2, 3\}$*,* *ext*$(g) = \{4, 5\}$*,* *ext*$(p) = \{6\}$*,* *ext*$(q) = \{6\}$.

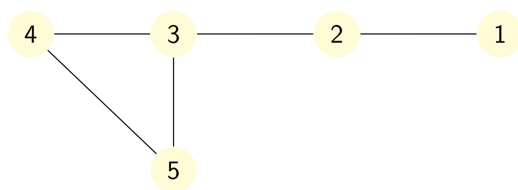


Definición 1.2

- *Si $v \in$ ext(α) decimos que el vértice v y la arista α son* **incidentes**.
- *Cuando la función ext no es inyectiva (es decir hay al menos dos aristas con los mismos extremos) decimos que el grafo posee aristas múltiples, y lo llamaremos* **multigrafo**.
- *Un* **grafo simple** *es un grafo sin lazos ni aristas múltiples.*

Observación 1.3 *En el caso de que $G = (V, E,$ext$)$ sea un grafo simple, podemos identificar cada arista α de E con sus extremos ext$(\alpha) = \{v, w\}$, pues no habrá otra arista con el mismo conjunto de extremos. En ese caso el grafo quedará representado por $G = (V, E)$.*

Ejemplo 1.4 *El grafo simple:*



se representa como $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y $E = \{\{i, i+1\} \ / \ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\{3, 5\}\}$.

Definición 1.5 *Sea G un grafo (o multigrafo). Un* **camino** *en G es una secuencia no vacía alternada de vértices y aristas:*

$$\gamma = (v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2, \cdots, \alpha_k, v_k),$$

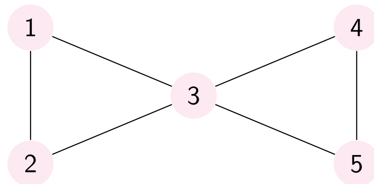
donde ext$(\alpha_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, con $\alpha_i \in E$, para todo $1 \leq i \leq k$, con $v_i \in V$, $0 \leq i \leq k$. Diremos, en este caso, que el **largo** *del camino es k (el número de aristas del camino).*

Observación 1.6 *Para simplificar la notación, en el contexto de grafos simples, el camino se lo puede denotar como una secuencia de vértices $\gamma = (v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k)$,, donde $\{v_{i-1}, v_i\}$ determina la arista de E, para todo $1 \leq i \leq k$.*

Tipos de caminos*:*
Si $\gamma = (v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2, \cdots, \alpha_k, v_k)$, donde $v_i \in V$, $0 \leq i \leq k$, $\alpha_i \in E$, con ext$(\alpha_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, para todo $1 \leq i \leq k$, diremos que γ es:

- *TRIVIAL, si $k = 0$, o sea es un camino sin aristas;*
- *ABIERTO, si $v_0 \neq v_k$, (en particular no puede ser trivial);*
- *CERRADO, si no es trivial con $v_0 = v_k$;*
- *RECORRIDO, si es un camino abierto ($v_0 \neq v_k$), que no repite aristas ($\alpha_i \neq \alpha_j$, si $i \neq j$);*
- *CIRCUITO, camino cerrado ($v_0 = v_k$), que no repite aristas ($\alpha_i \neq \alpha_j$, si $i \neq j$);*
- *CAMINO SIMPLE:*
  - *CAMINO SIMPLE ABIERTO: camino que no repite vértices ($v_i \neq v_j$, si $i \neq j$);*
  - *CAMINO SIMPLE CERRADO: camino que no repite vértices ($v_i \neq v_j$, si $i \neq j$), excepto los dos extremos del camino $v_k = v_0$;*
- *CICLO, camino cerrado ($v_0 = v_k$), de largo mayor o igual a tres ($k \geq 3$), que no repite vértices ($v_i \neq v_j$, si $i \neq j$), salvo el primero y el último.*

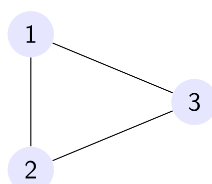
Ejemplo 1.7 *En el grafo G :*



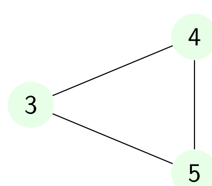
se pueden idenitficar:

- *12 ciclos de largo 3 (3-ciclos);*
- *5 caminos triviales;*
- *12 caminos de largo 1;*
- *20 caminos de largo 2;*
- *etc.*

¿Y cuántas copias de C_3 hay en el grafo G? (C_3 es un grafo con un 3-ciclo; es el grafo con el ciclo más chico que existe). Podemos ver que G posee dos subgrafos isomorfos a C_3, que son los subgrafos de G inducidos por **(a)** $\{1,2,3\}$ *y* **(b)** $\{3,4,5\}$.
O sea:
(a)



y **(b)**



Compárese las respuestas: hay 12 ciclos de longitud 3, pero solo hay dos copias de C_3 en G.

¿Cuántos subgrafos de G hay que sean isomorfos a P_2? Hay 6 subgrafos isomorfos a P_2 (uno por arista). Sin embargo, como vimos arriba, hay 12 caminos de largo 1.

¿Y cuántos subgrafos de G hay que sean isomorfos a P_3? Hay 10 subgrafos isomorfos a P_3 y hay 20 caminos de largo 2.