Segundo Parcial – Matemática Discreta I
SOLUCIÓN Versión 2

Miércoles 22 de noviembre de 2023

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	E	A	B	D

Múltiple Opción 1

Se considera un conjunto A cualquiera (finito o infinito) con una relación R de orden total en A. Dadas las siguientes afirmaciones:

I. Todo elemento maximal de A es un máximo.
II. A tiene al menos un elemento minimal.
III. A tiene a lo sumo un elemento minimal.
IV. A es un retículo.

Indicar la opción correcta:
(A) Las afirmaciones I, II, III y IV son verdaderas;
(B) Las afirmaciones I, III y IV son verdaderas y la afirmación II es falsa;
(C) Las afirmaciones I y III son verdaderas y las afirmaciones II y IV son falsas;
(D) La afirmación IV es verdadera y las afirmaciones I, II y III son falsas;
(E) Las afirmaciones I, II, III y IV son falsas.

Solución - Múltiple Opción 1

Sea $x \in A$ un elemento maximal de R y sea $y \in A$ tal que $x \neq y$. Como R es total, sabemos que xRy o yRx. Por otro lado como $x \neq y$ y x es maximal, $x\not R y$. Luego yRx. Esto prueba que x es máximo por lo que la afirmación I es verdadera.

El conjunto de los números enteros con su relación de orden habitual no tiene ningún elemento minimal (basta para cada n considerar $n-1<n$), por lo que la afirmación II es falsa. Observar que esto sólo puede pasar si A es infinito (ver ejercicio de desarrollo 1 del examen de Julio 2023).

De forma análoga a la afirmación I, todo elemento minimal de A es un mínimo y por lo tanto es único, por lo que la afirmación III es verdadera.

Sean $x, y \in A$. Como R es total, xRy o yRx. Sin pérdida de generalidad supongamos el primer caso. Luego, $x = \min\{x,y\} = \inf\{x,y\}$ e $y = \max\{x,y\} = \sup\{x,y\}$. Luego A es un retículo y la afirmación IV es verdadera.

Por todo lo anterior la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas sobre $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.
(A) 50; (B) 60; (C) 70; (D) 80; (E) 90.

Solución - Múltiple Opción 2

Recordando que cada relación de equivalencia induce una partición, lo que se pide es la cantidad de particiones de $\{1,2,3,4,5,6\}$ en 3 subconjuntos disjuntos y no vacíos, que es precisamente el número de Stirling de segunda especie $S(6,3)$.

$$S(6,3) = \frac{Sob(6,3)}{3!} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i C_i^3 (3-i)^6 = \frac{1}{6}(C_0^3 3^6 - C_1^3 2^6 + C_2^3) = \frac{1}{6}(729 - 3\cdot 64 + 3) = 90$$

Luego, la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 3

Hallar la cantidad de vértices de grado 1 que tiene un árbol con exactamente cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5. Se sabe que el grado máximo de todos los vértices del árbol es igual a 5.
(A) 10;
(B) 11;
(C) 12;
(D) 13;
(E) 14.

Solución - Múltiple Opción 3

Sea $G = (V, E)$ un árbol que cumple lo pedido. Recordemos que todo árbol no vacío cumple que $|E| = |V| - 1$.

Sea h la cantidad de hojas del árbol. Por la letra se deduce que $|V| = h + 8$. Por el lema de handshaking se tiene que $2|E| = h \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5$, por lo que $2|E| = h + 24$.

Usando que $|E| = |V| - 1$ y que $|V| = h + 8$ se deduce que $2(h + 7) = h + 24$, y despejando h se consigue que $h = 10$, por lo que la respuesta correcta es la A.

Múltiple Opción 4

Hallar la cantidad de grafos simples 7-regulares con 10 vértices, a menos de isomorfismo.
(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

Solución - Múltiple Opción 4

Recordemos que dos grafos son isomorfos si y sólo si sus complementos lo son. Por lo tanto, lo pedido es equivalente a hallar la cantidad de grafos simples que son 2-regulares con 10 vértices.

Observemos que todo grafo simple conexo 2-regular es un ciclo. Entonces, la lista de grafos simples conexos 2-regulares y no isomorfos con 10 vértices son $C_{10}, C_7 \cup C_3, C_6 \cup C_4, C_5 \cup C_5, C_4 \cup C_3 \cup C_3$. Luego son 5, y la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 5

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple 5-regular con 8 vértices. Entonces:
(A) G es plano, conexo y euleriano;
(B) G es plano, conexo y no es euleriano;
(C) G es plano, no es conexo y es euleriano;
(D) G no es plano, es conexo y no es euleriano;
(E) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

Solución - Múltiple Opción 5

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple 5-regular con 8 vértices. Como G tiene más de 2 vértices de grado impar, G no es euleriano.

Por el lema de handshaking se deduce que $2|E| = 5|V| = 5 \times 8 = 40$, por lo que $|E| = 20$ y además sabemos que $|V| = 8$. En particular, G es un grafo simple conexo y con al menos 3 vértices. Si G fuese plano entonces debería cumplir que $|E| \leq 3|V| - 6$. Sin embargo, no se cumple la desigualdad anterior. Por lo tanto, G no es plano.

Si G no fuera conexo, debería tener al menos 2 componentes conexas. Por ser simple y 5-regular cada componente tiene al menos 6 vértices y tendríamos $|V| \geq 12$. Esto es absurdo por lo que G es conexo.

A partir del estudio anterior podemos concluir que la opción correcta es la D.

Primer ejercicio de desarrollo

(1) Enunciar el Teorema de Euler para los grafos planos y conexos.
(2) Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, con $v = |V| \geq 3$ y $e = |E|$. Probar que si G es plano, conexo y sin 3-ciclos, entonces $e \leq 2v - 4$.
(3) Deducir de lo anterior que el grafo $K_{3,3}$ no es plano.

Solución - Primer ejercicio de desarrollo

(1) Sea $G = (V, E)$ un grafo plano, conexo y no vacío, y sea r la cantidad de regiones determinadas por una inmersión plana de G, entonces $|V| - |E| + r = 2$.
(2) Separamos en dos casos según si G tiene ciclos o no.

Si no los tiene, por ser conexo y acíclico es un árbol y por lo tanto $e = v - 1$. Como $v \geq 3$ se cumple que $v - 1 \leq 2v - 4$, por lo que $e \leq 2v - 4$.

Si G tiene al menos un ciclo entonces todas sus regiones (incluyendo en particular la no acotada) tienen grado mayor que o igual a 4. Sean $R_1, R_2, \ldots, R_r$ las regiones delimitadas por alguna inmersión plana de G. Como G es plano, por el lema de handshaking para las regiones tenemos que

$$4r \leq \sum_{i=1}^{r} gr(R_i) = 2e,$$

por lo que $2r \leq e$. Además, el grafo G satisface las hipótesis del teorema de Euler para grafos planos y conexos, por lo que $e = v + r - 2$, y duplicando ambos miembros resulta que $2e = 2v + 2r - 4$. Usando que $2r \leq e$ y sustituyendo en la igualdad anterior deducimos que $2e = 2v + 2r - 4 \leq 2v + e - 4$, y por lo tanto, $e \leq 2v - 4$, que es lo que queríamos demostrar.
(3) El grafo $K_{3,3}$ es simple, conexo y no tiene 3-ciclos. Si fuese plano, entonces por la parte anterior tendríamos que $e \leq 2v - 4$, donde v y e son respectivamente la cantidad de vértices y aristas de $K_{3,3}$. Sin embargo, $K_{3,3}$ tiene 6 vértices y 9 aristas, por lo que no satisface la desigualdad anterior. La contradicción proviene del hecho de suponer que $K_{3,3}$ es plano. Por lo tanto, $K_{3,3}$ no es plano, como queríamos demostrar.

Segundo ejercicio de desarrollo

Sea A un conjunto con 9 elementos. Se considera una relación de orden R en A tal que:
(i) R tiene al menos una cadena[1] con 5 elementos, y
(ii) las anticadenas[2] de R tienen a lo sumo 3 elementos.

Se escribe m al número de elementos maximales de R.

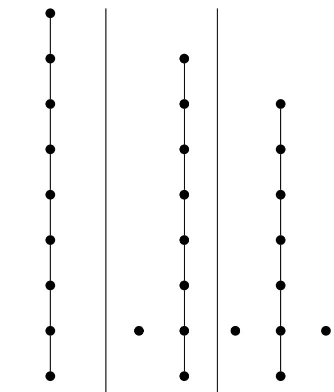
(1) Hallar todos los posibles valores del entero m para las relaciones de orden R en A que cumplen las condiciones (i) y (ii).
(2) Para cada valor posible de m determinado en (1), dibujar el diagrama de Hasse de una relación de orden R en A que cumple las condiciones (i) y (ii), y que tiene exactamente m elementos maximales.
(3) Sea $r = |R|$ la cantitad de elementos de la relación $R \subseteq A \times A$ y h la cantidad de aristas del diagrama de Hasse correspondiente. Probar que $r \geq h + 15$.

[1]Una *cadena* (del orden R) es un subconjunto $C \subset A$ cuyos elementos son comparables de a pares.
[2]Una *anticadena* (del orden R) es un subconjunto $C \subset A$ cuyos elementos son incomparables de a pares.

Solución - Segundo ejercicio de desarrollo

(1) Sea R una relación de orden parcial que cumple con todas las condiciones del enunciado y sea m la cantidad de elementos minimales de R. Como el conjunto que consiste en todos los elementos minimales de R es una anticadena y las anticadenas de R tienen a lo sumo 3 elementos, se sigue que $m \leq 3$. Por otro lado, toda relación de orden parcial finita tiene al menos un elemento que es minimal, por lo que $m \geq 1$. En conclusión, m debe valer 1, 2, o 3.

(2) Los siguientes 3 diagramas de Hasse dejan en evidencia que para cada $m \in \{1, 2, 3\}$ efectivamente existe alguna relación R con m elementos que satisface cada una de las condiciones anteriores.



$m = 1$ | $m = 2$ | $m = 3$

(3) Sea h la cantidad de aristas del diagrama de Hasse de la relación de orden parcial R, y sea r la cantidad de elementos de R. Sea $A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ la cadena de 5 elementos de A, tal que $(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5) \in R$. Denotemos a_6, a_7, a_8 y a_9 a los restantes 4 elementos del conjunto A. Como R es una relación de orden parcial, en particular R es reflexiva. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, los pares (a_i, a_i) son elementos de R que no son aristas del diagrama de Hasse. Además, como R es una relación de orden parcial entonces R es transitiva, y los siguientes 6 elementos dados por (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_4), (a_2, a_5), y (a_3, a_5), pertenecen a R pero no son aristas del diagrama de Hasse. Entonces, hay al menos 15 elementos que pertenecen a R y que no son aristas del diagrama de Hasse. Como cada una de las aristas del diagrama de Hasse es un elemento de R, en particular se sigue que $r \geq h + 15$, como queríamos demostrar.