Segundo Parcial – Matemática Discreta I

Miércoles 22 de noviembre de 2023.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas. Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.
Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros ("Des. 1", "Des. 2" y "Puntaje Total") no se deben llenar y son para uso docente.
Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 8 puntos.
Respuestas incorrectas restan 1 punto.
Cada ejercicio de desarrollo correcto y completo suma 10 puntos.
Se debe entregar el desarrollo escrito en lapicera.
No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción.
La duración del parcial es de tres horas.

Múltiple Opción 1

Se considera un conjunto A cualquiera (finito o infinito) con una relación R de orden total en A. Dadas las siguientes afirmaciones:

I. Todo elemento maximal de A es un máximo.
II. A tiene al menos un elemento minimal.
III. A tiene a lo sumo un elemento minimal.
IV. A es un retículo.

Indicar la opción correcta:
(A) Las afirmaciones I, II, III y IV son verdaderas;
(B) Las afirmaciones I, III y IV son verdaderas y la afirmación II es falsa;
(C) Las afirmaciones I y III son verdaderas y las afirmaciones II y IV son falsas;
(D) La afirmación IV es verdadera y las afirmaciones I, II y III son falsas;
(E) Las afirmaciones I, II, III y IV son falsas.

Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.
(A) 50;
(B) 60;
(C) 70;
(D) 80;
(E) 90.

Múltiple Opción 3

Hallar la cantidad de vértices de grado 1 que tiene un árbol con exactamente cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5. Se sabe que el grado máximo de todos los vértices del árbol es igual a 5.
(A) 10;
(B) 11;
(C) 12;
(D) 13;
(E) 14.

Múltiple Opción 4

Hallar la cantidad de grafos simples 7-regulares con 10 vértices, a menos de isomorfismo.
(A) 4;
(B) 5;
(C) 6;
(D) 7;
(E) 8.

Múltiple Opción 5

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple 5-regular con 8 vértices. Entonces:
(A) G es plano, conexo y euleriano;
(B) G es plano, conexo y no es euleriano;
(C) G es plano, no es conexo y es euleriano;
(D) G no es plano, es conexo y no es euleriano;
(E) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

Primer ejercicio de desarrollo

(1) Enunciar el Teorema de Euler para los grafos planos y conexos.
(2) Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, con $v = |V| \geq 3$ y $e = |E|$. Probar que si G es plano, conexo y sin 3-ciclos, entonces $e \leq 2v - 4$.
(3) Deducir de lo anterior que el grafo $K_{3,3}$ no es plano.

Segundo ejercicio de desarrollo

Sea A un conjunto con 9 elementos. Se considera una relación de orden R en A tal que:
(i) R tiene al menos una cadena[1] con 5 elementos, y
(ii) las anticadenas[2] de R tienen a lo sumo 3 elementos.

Se escribe m al número de elementos maximales de R.

(1) Hallar todos los posibles valores del entero m para las relaciones de orden R en A que cumplen las condiciones (i) y (ii).
(2) Para cada valor posible de m determinado en (1), dibujar el diagrama de Hasse de una relación de orden R en A que cumple las condiciones (i) y (ii), y que tiene exactamente m elementos maximales.
(3) Sea $r = |R|$ la cantitad de elementos de la relación $R \subseteq A \times A$ y h la cantidad de aristas del diagrama de Hasse correspondiente. Probar que $r \geq h + 15$.

Justificar detalladamente cada paso de las demostraciones.

[1] Una *cadena* (del orden R) es un subconjunto $C \subset A$ cuyos elementos son comparables de a pares.
[2] Una *anticadena* (del orden R) es un subconjunto $C \subset A$ cuyos elementos son incomparables de a pares.