Facultad de Ingeniería
IMERL
MATEMÁTICA DISCRETA I
Curso 2022

1. Inducción Completa (Secciones 4.1, 4.2 y 4.5)

Ejercicio 1
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Ejercicio 2
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Ejercicio 3
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Ejercicio 4
Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

Ejercicio 5
Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 6
Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}\, \forall n \geq 4$ entonces $a_n \geq 3^n,\ \forall n \geq 1$.

Ejercicio 7
Encontrar el primer natural n_0 tal que para cada natural $n \geq n_0$ existen dos naturales a y b tales que $n = 5a + 3b$.

Ejercicio 8
Probar que todo número natural mayor que 1 se descompone en factores primos.

Ejercicio 9
Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

2. Combinatoria (Secciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4)

Ejercicio 1
Consideremos un alfabeto que posee 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Ejercicio 2
En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6 con al menos 3 preguntas elegidas entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 3
En una playa se juntan 13 personas que deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol. Para ello, deciden hacer tres equipos de 3 integrantes y uno de 4. Entre las 13 personas hay una sumamente habilidosa y otra que es principiante; las restantes 11 personas tienen un nivel intermedio. Para equiparar, la persona habilidosa es asignada en uno de los equipos de 3 y la principiante en el equipo de 4. Probar que en estas condiciones existen 46200 posibles formas de armar los equipos.

Ejercicio 4
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 5

(a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

(b) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del dominó?

(c) ¿Cuántos recorridos diferentes puede realizar una torre de ajedrez para desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

Ejercicio 6

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

Ejercicio 7

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

Ejercicio 8
Contar la cantidad de naturales menores que cien mil cuyos dígitos suman 7.

Ejercicio 9
Hallar la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra $ALGORITMO$, con o sin sentido. Por ejemplo, $LOGARITMO$ y $RITMOALGO$ cuentan.

Ejercicio 10

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

Ejercicio 11
¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 12
Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos usando la regla del producto.

Ejercicio 13
Hallar la cantidad de maneras de distribuir r pelotas idénticas en n cajas diferentes.

Ejercicio 14
Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\dots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Ejercicio 15
Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, contar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \dots + r_n = m$.

Ejercicio 16
Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.

(b) $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.

(c) $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.

(d) $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.

(e) $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n}$, siendo $k \leq n \leq N$.

(f) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

3. Principio del Palomar y de Inclusión-Exclusión

Principio de Inclusión-Exclusión (Secciones 8.1 a 8.3)

Ejercicio 1

(a) ¿Cuántos naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5,7 ni 11?

Ejercicio 2
Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3
¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 4
¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5
Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

Ejercicio 6
Calcular cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los pares no están en su posición original.

(c) Los pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7
Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿ De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites, sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?

Principio del Palomar (Sección 5.5)

Ejercicio 8
Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 9
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 10
Probar que al menos uno de m enteros consecutivos es divisible por m.

Ejercicio 11
Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos que tienen la misma cantidad de amigos.

Ejercicio 12
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 13
Se consideran n puntos en un triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es el n mínimo que garantiza que al menos dos de los puntos se encuentran a distancia menor o igual que 1/2? Vale colocar puntos sobre los lados del triángulo. ¿Y si se pidiera que al menos dos puntos estuvieran a distancia menor estricta que 1/2?

Ejercicio 14
Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

Ejercicio 15
Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadradito del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demostrar que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.

Ejercicio 16

(a) ¿ Es posible que un caballo de ajedrez comience en una casilla y vuelva a la misma con una cantidad impar de saltos?

(b) Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

Ejercicio 17
Se sabe que Magnus Carlsen estudió ajedrez al menos una vez por día durante 30 días consecutivos, y en esos 30 días estudió exactamente 45 veces en total. Demostrar que existe un conjunto días consecutivos en los que Magnus Carlsen entrenó en total exactamente 14 veces.

4. Sucesiones y Recurrencias (Secciones 10.1, 10.2 y 10.3)

Ejercicio 1
Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad \forall n \geqslant 2$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1$, con $a_0 = 7, a_1 = 3$.

(c) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad \forall n \geqslant 2$, con $a_0 = 5, a_1 = 12$.

(d) $a_n = 2a_{n-1} + n2^n, \quad \forall n \geqslant 1$, con $a_0 = 1$.

Ejercicio 2
Exprese a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos que se dieron los primeros n invitados de una reunión.

(b) El número de secuencias de 0s y 1s de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de As, Bs y Cs de largo n en las cuales no aparecen dos As seguidas.

(d) Cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se puede a veces saltar un escalón.

(e) El número de formas en que una sucesión de unos y doses suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.

Ejercicio 3
Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 4
Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$.
(b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$.
(c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$.
(d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 5
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 6
Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

5. Relaciones (Secciones 5.1, 7.1, 7.2 y 7.4)

Ejercicio 1
Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas (o sea que $\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas (o sea que $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

(b) $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

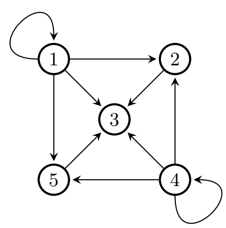
(c) $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

(d) $\emptyset$.

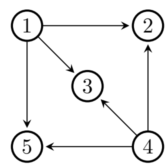
(e) $A \times A$.

(f) Tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:

i)



ii)



- Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 (Parcial 2000)
Hallar el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas*.

Ejercicio 4
¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 5
En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 6 (Parcial 2019) Sea $f : A \to B$ una función. Sea $R_f \subset A \times A$ tal que $xR_f y \iff f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 7
Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n \text{ (o sea que existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k.n).$$

(a) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(b) Demostrar que $a \equiv b \Longleftrightarrow a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n.

(c) Describir el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 1, 2, 3$.

(d) Probar que $\mathbb{Z}/\equiv$ tiene n elementos.

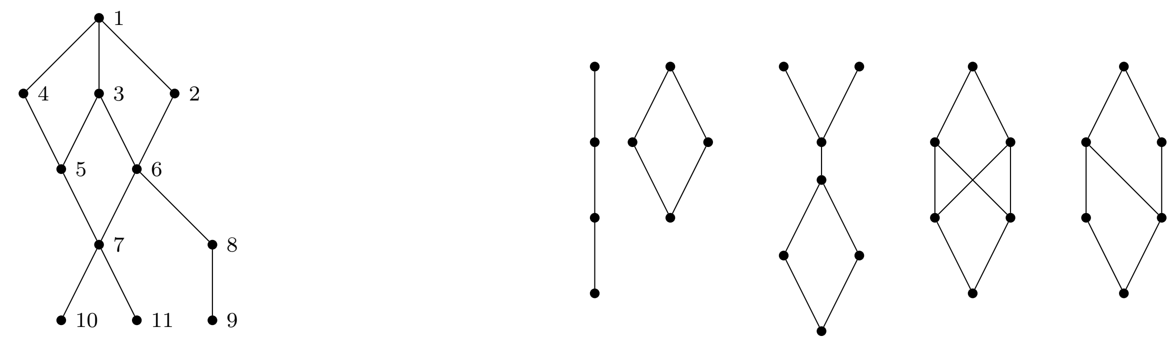
Ejercicio 8
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

6. Relaciones de Orden (Sección 7.3)

Ejercicio 1 Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$ en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 1 (a). Escriba una lista de instrucciones de



(a) (b)

Figura 1

modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

Ejercicio 2 Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, …, P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 < P_7, P_2$; $P_7 < P_6$; $P_6 < P_4$; $P_2 < P_8, P_5$; $P_5 < P_3, P_0$; $P_8 < P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 < P_1$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 3 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 4 Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 5 Halle el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

Ejercicio 6 ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 (b) representa un retículo?

Ejercicio 7 Demuestre que si $(A, \leq)$ es un retículo y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo.

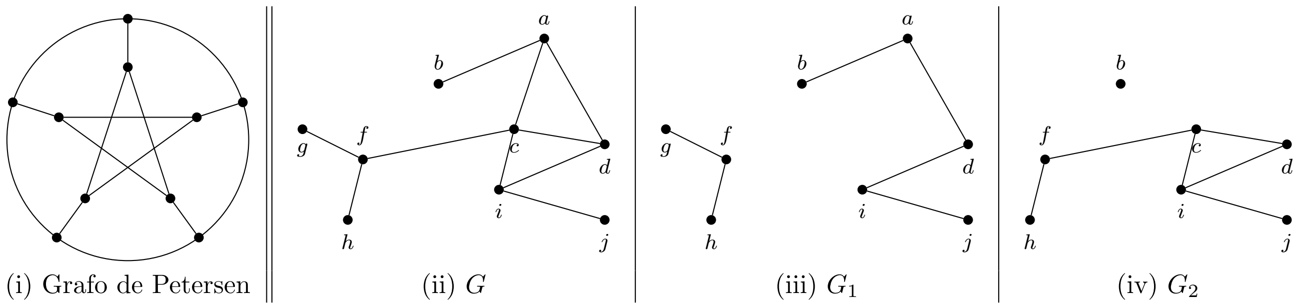
Ejercicio 8 Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

Ejercicio 9 Sea $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

7. Teoría de Grafos - Elementos (Secciones 11.1, 11.2 y 12.1)

Definiciones: Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n*–ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. La *rueda* W_n consiste en un C_n más un vértice adicional unido a los n vértices del ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i).

Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. El árbol trivial tiene un solo vértice y ninguna arista. La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2. Un vértices se dice *aislado* si no es adyacente a ningún otro. Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.



(i) Grafo de Petersen (ii) G (iii) G_1 (iv) G_2

Figura 1

Ejercicio 1 Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine: 1) Un camino que no sea un recorrido; 2) Un recorrido que no sea camino simple; 3) Un camino simple de b a d; 4) Un camino cerrado que no sea un circuito; 5) Todos los ciclos que pasan por b; 6) Todos los caminos simples de b a f.

Ejercicio 2 ¿Cuántos ciclos tienen K_n? ¿Cuántos caminos simples tiene K_n? ¿y $K_{1,n}$?

Ejercicio 3 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{ 1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 4 Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 5 Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a K_n para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 6 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 7 Contar la cantidad de aristas y de ciclos de longitud k que hay en la rueda W_n (que consiste en un C_n más un vértice central unido a los n vértices del ciclo).

Ejercicio 8 Probar que en un grafo conexo, todo par de caminos simples *con longitudes la mayor posible* tienen algún vértice en común. Demostrar que la proposición es falsa si se cambia la frase en itálica por *con longitud igual al diámetro* y también es falsa si se cambia por *maximales*.

Ejercicio 9 Hallar el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y el grafo de Petersen.

Ejercicio 10 Sea G el grafo de la Figura 1 (ii).

(a) ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen algún ciclo?

(b) ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?

(c) ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

(d) ¿cuántos subgrafos de la parte (b) tienen el vértice a como vértice aislado?

(e) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

(f) Describa el subgrafo G_1 y G_2 de G (Figura 1 (iii) y (iv) respectivamente) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.

(g) Encontrar un subgrafo de G que no sea inducido.

Ejercicio 11 Considere un grafo $G = (V, E)$. Demuestre que:

(a) si G es conexo entonces $|E| \geq |V| - 1$.

(b) si G es acíclico entonces $|E| \leq |V| - 1$.

(c) en general $\kappa(G) \geq |V| - |E|$.

Ejercicio 12 Encontrar un grafo $G = (V, E)$ que no sea un árbol, pero que $|V| = |E| + 1$.

Ejercicio 13 Contar la cantidad de árboles recubridores de K_4 y K_5.

Ejercicio 14 (Examen Marzo 2001)
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

(a) Hallar los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

(b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

(c) Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

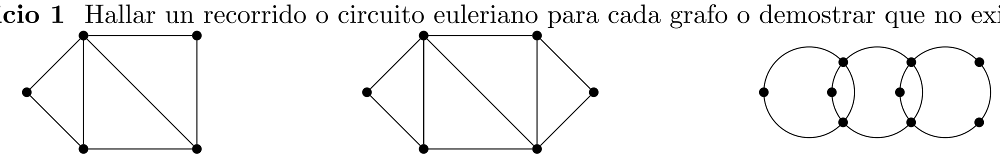
(d) Demostrar que H_n no tiene 3–ciclos.

(e) ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n?

Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4–ciclos pasan por él.

8. Isomorfismos, Grafos Eulerianos y Hamiltonianos (Secciones 11.2, 11.3 y 11.5)

Ejercicio 1 Hallar un recorrido o circuito euleriano para cada grafo o demostrar que no existe.



Ejercicio 2
Encontrar un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y
$E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 3
Determinar los valores de n para los cuales K_n tiene un circuito/recorrido euleriano.

Ejercicio 4
Encontrar la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5 Para cada par de grafos de la Figura 2 determinar si los grafos son o no isomorfos.

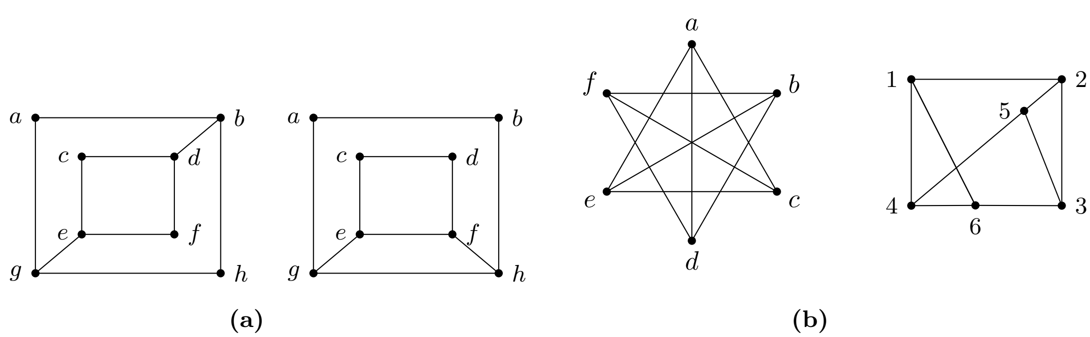
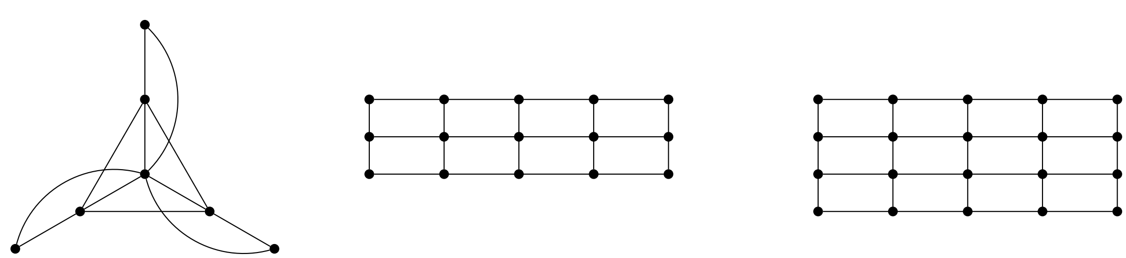


Figura 2

Ejercicio 6
Encontrar un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la figura.



Ejercicio 7
Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dar un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 8

(a) Demostrar que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

(b) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 3 son isomorfos?

(c) Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de G.

(d) Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de n vértices.

(e) Construir grafos autocomplementarios con 4 y con 5 vértices.

(f) Determinar para qué valores de n existe un grafo autocomplementario de n vértices. *Sugerencia:* Demostrar que n debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalizar la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregar un vértice al grafo anterior y unir en forma adecuada.

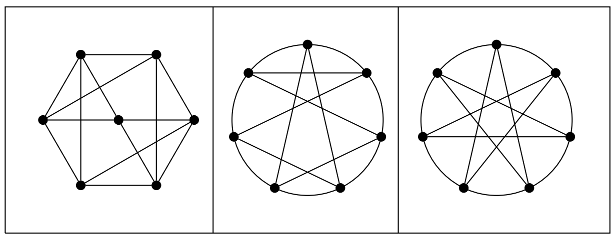


Figura 3

Ejercicio 9 En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda una foto por Whatsapp a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba fotos de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 10 ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 11 Representar a todos los árboles no isomorfos con 6 vértices.

Ejercicio 12

(a) Determinar el número de vértices de un grafo simple 3–regular con 9 aristas.

(b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

(c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 13 Probar que existen infinitos grafos simples conexos y 3-regulares.

Ejercicio 14 Demostrar que en una reunión de 6 personas, existen 3 personas que se conocen entre sí o 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).

9. Planaridad y Coloración (Secciones 11.4 y 11.6)

Ejercicio 1

(a) Determine cuáles de los grafos de la Figura 4 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

(b) Para los grafos planos de la parte anterior determinar el número de vértices, aristas y regiones del mismo. Chequear que sus respuestas satisfacen la fórmula de Euler.

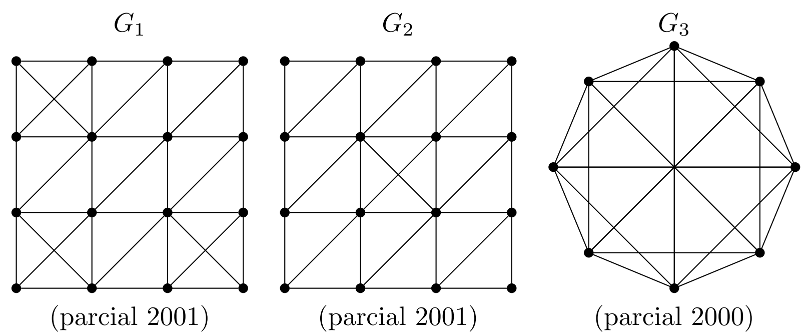


Figura 4

Ejercicio 2

(a) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene C_4?

(b) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene W_4?

(c) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene un árbol de n vértices?

Ejercicio 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 4

Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 5

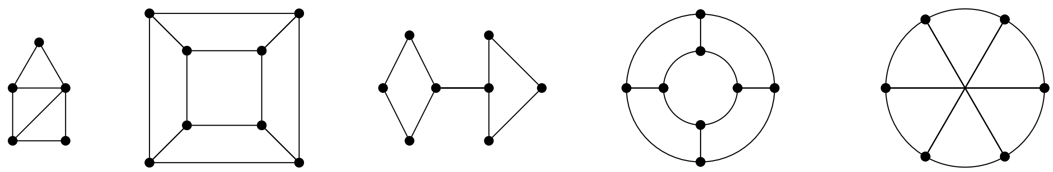
Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

Ejercicio 6

Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

Ejercicio 7 Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Ejercicio 8 Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



Ejercicio 9
Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, $\overline{K_n}$, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

Ejercicio 10 Sea G un grafo con 4 vértices que tiene una arista e de G tal que $p_{G-e}(2) = p_G(2) = 2$. Hallar $p_G(3)$.

Ejercicio 11 Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \text{máx}_{v \in V(G)}\, gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

Ejercicio 12 Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y solo si G no tiene ciclos impares.