Ejercicio MO4: Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas formas hay de formar los grupos si cada uno debe contar con alguna maestra y algún alumno?

G1 G2 G3

A) $S(4,3)S(6,3)$

B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$

→ **C)** $S(4,3)Sob(6,3)$

D) Ninguna de las anteriores

$$S(4,3) \cdot Sob(6,3) = S(6,3)\, Sob(4,3) = \frac{\overbrace{Sob(6,3)}^{\text{Niños}}\ \overbrace{Sob(4,3)}^{\text{Maestras}}}{3!}$$

$$S(m,n) = \frac{Sob(m,n)}{n!}$$

Pregunta **4**

Sin responder aún

Puntúa como 20,00

Marcar pregunta

Se considera la función generatriz $F(x)=(1+2x)/(1-2x)^2$ asociada a la sucesión (f_n). Entonces:

(Obs. Puede serle útil saber que $1+2x= 2-(1-2x)$)

Seleccione una:

- a. $f_n= (n+1).2^n$
- b. $f_n= (n-2).(-2)^n$
- c. $f_n= (2n+1).(-2)^n$
- d. $f_n= (2n+1).2^n$

$$\frac{1+2x}{(1-2x)^2} = \frac{2-(1-2x)}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2} - \frac{1}{1-2x}$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1+2x+4x^2+8x^3+\dots+2^n x^n+\dots$$

$$f_n = \boxed{2\cdot(n+1)2^n} - 2^n$$

$$= (2n+2-1)2^n = (2n+1)2^n$$

$$2\cdot\frac{1}{(1-2x)^2} = 2\Big[\underset{CR(2,0)}{1} + \underset{CR(2,1)}{2(2x)} + \underset{CR(2,2)}{3(2x)^2} + 4(2x)^3 + \dots + (n+1)(2x)^n + \dots\Big]$$

$$= 2\left[1 + 2\cdot 2\cdot x + 3\cdot 2^2 x^2 + \dots + \boxed{(n+1)2^n}\, x^n\right]$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+\dots+(n+1)x^n$$

Sea $A(x)=(2+x)/(1-x-x^2)$ la función generatriz de la sucesión (a_n). Entonces a_1 es igual a:

Seleccione una:

- a. 0
- b. 3
- c. 1
- d. 2

$$a_1 = [x^1]\ \frac{(2+x)}{1-x-x^2} = [x^1]\left(\frac{2}{1-x-x^2} + \frac{x}{1-x-x^2}\right)$$

$$= [x^1]\ \frac{2}{\underbrace{1-x-x^2}} + [x^0]\ \frac{1}{1-x-x^2}$$

$$\boxed{1-x-x^2 \to \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \searrow -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}}$$

$$\frac{1+0x}{\cancel{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}} = \frac{A}{\underbrace{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}} + \frac{B}{\underbrace{\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}}$$

$$= \frac{A\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) + B\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}{\cancel{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}}$$

$$= \overline{(A+B)}\cdot 1 + \overline{\left(A\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}x$$

$$-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)B+B=1$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}A+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B=0 \end{cases} \rightarrow \quad A=-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)B$$

$$\left(-1-\sqrt{5}\right)B+\left(1-\sqrt{5}\right)B=\left(1-\sqrt{5}\right)$$

$$-2\sqrt{5}\,B=1-\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \boxed{B=\frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}}$$

$$A+\frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}=1 \rightarrow \boxed{A=1+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

$$A\left[1+\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)+\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2+\ldots\right]$$

$$\frac{\boxed{A}}{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}+\frac{B}{\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

$$\frac{1+x}{(1-x^2)(1+x)} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1+x)} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

$$= (1-x)(1+x)$$

$$= \frac{A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + C(1-x)}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ \rightarrow x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1 \\ = 1 \\ = 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{(1-x^3)} = 1 + (x^3) + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \ldots$$

3. Cuatro grandes ladrones han robado una colección de 13 diamantes idénticos. Luego del hábil robo, discutieron cómo repartir el lote. Tres de ellos tienen TOCs particulares: uno no quiere más de 2 diamantes, otro solo acepta múltiplos de 3 y otro solo acepta cantidad impar mayor o igual a 3.

La cantidad de maneras de distribuir los diamantes de acuerdo a las condiciones es:

(A) 0 (B) 40 (C) 49 (D) 16 (E) 36

$$\# \text{Sol} \left\{ \begin{array}{l} L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 13 \\ L_1 \leq 2 \text{ , } L_2 \text{ múltiplo de } 3 \text{ , } L_3 \geq 3 \text{ y } L_3 \text{ impar} \end{array} \right.$$

$$[x^{13}] \overbrace{(x^0 + x^1 + x^2)}^{L_1} \cdot \overbrace{(1 + x^3 + x^6 + \dots)}^{L_2} \overbrace{(x^3 + x^5 + x^7 + \dots)}^{L_3} \cdot \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{13})}_{L_4}$$

$$[x^{13}] \frac{(1 - x^3)}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x^3)} \cdot \frac{x^3}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x)}$$

$$= [x^{13}] \frac{x^3 (1 - \cancel{x^3})}{(1-x)(1-\cancel{x^3}) \underbrace{(1-x^2)}_{(1+x)(1-x)} (1-x)} = [x^{13}] \underbrace{\frac{x^3}{(1-x)^3 (1+x)}}$$

$$=[x^{13}]\left(\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{(1+x)}\right)$$

$$=[x^{13}]\frac{A}{(1-x)}+[x^{13}]\frac{B}{(1-x)^2}+[x^{13}]\frac{C}{(1-x)^3}+[x^{13}]\frac{D}{(1+x)}$$

$$= A\cdot 1 + B\cdot\overset{(P(2,13)}{\overbrace{14}} + C\cdot(P(3,13)) - D$$

1, 2, 3, 4, 5   6, 7, 8, 9

Ejercicio 1.(V1.) Sean $I_1 = \{1, \ldots, 5\}$ e $I_2 = \{6, \ldots, 9\}$. Se define un embarajado de I_1 e I_2 como una función biyectiva: $f : I_1 \cup I_2 \to I_1 \cup I_2$ tal que $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_1$ con $i < j$, y $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_2$ con $i < j$. ¿Cuántos embarajados posibles hay de I_1 e I_2?.
R. $\binom{9}{5} = 126$ pues basta con determinar quien es $f(I_1)$, un subconjunto de tamaño 5 dentro de $I_1 \cup I_2$.

1 6 2 7 8 3 4 5 9

1 6 2 3 7 8 4 5 9

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \boxed{\frac{9!}{5!\,4!}}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$