Clase 11: El proceso de Bernoulli

Matías Carrasco

26 de agosto de 2019

Resumen El proceso de Bernoulli es un modelo probabilístico para la repetición de ensayos independientes. De interés son la cantidad de éxitos en n ensayos (la distribución binomial) y el tiempo de espera entre dos éxitos consecutivos (la distribución geométrica).

Índice

El proceso de Bernoulli 1
La distribución binomial 2
La distribución geométrica 6
Aplicación al lanzamiento de una moneda 9

El proceso de Bernoulli

En esta sección estudiaremos un modelo matemático de ensayos repetidos, conocido como el proceso de Bernoulli, en el cual cada ensayo puede resultar en la ocurrencia de un cierto evento de interés.[1] A la ocurrencia del evento la llamaremos "éxito" y a la no ocurrencia "fracaso".

[1] El modelo fue creado por el matemático suizo Jakob Bernoulli en 1713.

Algunos ejemplos son:

Naturaleza del ensayo	Significado de éxito	Significado de fracaso	Probabilidades p y q
Lanzar una moneda justa	sale cara	sale cruz	$1/2$ y $1/2$
Lanzar un dado equilibrado	sale un seis	no sale un seis	$1/6$ y $5/6$
Lanzar un par de dados	sale doble seis	no sale doble seis	$1/36$ y $35/36$
Nacimiento de un bebé	es mujer	es varón	0.487 y 0.513

Supongamos que en cada ensayo la probabilidad de éxito es p, la probabilidad de fracaso es $q = 1 - p$, y además que los ensayos son independientes.[2] El proceso consiste en repetir cada ensayo infinitas veces e ir llevando un registro de éxitos y fracasos. Podemos llevar un registro de los ensayos utilizando secuencias de $0's$ y $1's$. Cada vez que ocurre un éxito ponemos un 1, y cada vez que ocurre un fracaso ponemos un 0.

[2] En este caso decimos que son ensayos de Bernoulli.

Estamos interesados en tres tipos de variables aleatorias asociadas al proceso de Bernoulli:

- La primera nos indica si hubo un éxito o un fracaso en el i-ésimo ensayo. Así, llamaremos

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si éxito en el } i\text{-ésimo ensayo;} \\ 0 & \text{si fracaso en el } i\text{-ésimo ensayo.} \end{cases} \quad (1)$$

Claramente cada X_i es una variable Bernoulli con probabilidad de éxito igual a p.

- La segunda nos indica cuántos éxitos hubo en n ensayos. Así, llamamos

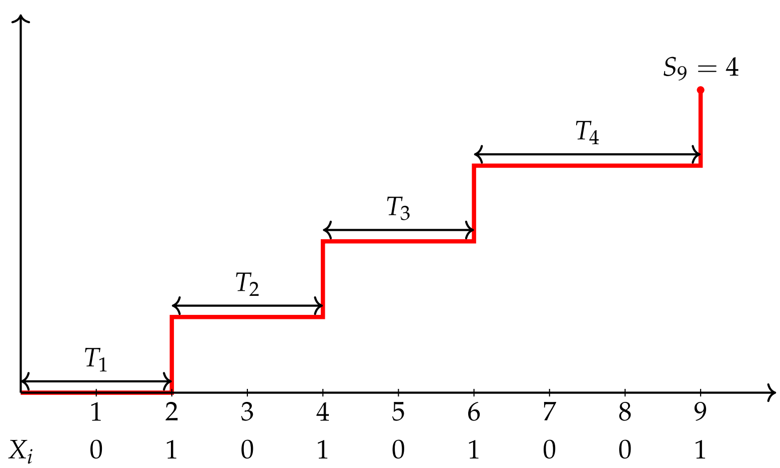
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n. \quad (2)$$

La cantidad de éxitos es igual a la suma de las n primeras X_i ya que cada una de ellas vale 1 cuando ocurre un éxito y 0 si no. A esta variable la llamaremos binomial de parámetros n y p.

- La tercera nos indica el tiempo que transcurre entre dos éxitos consecutivos. Así, llamamos

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{tiempo hasta el primer éxito} = \min\{i \geq 1 : X_i = 1\} \quad (3) \\ T_2 &= \text{tiempo entre 1er y 2do éxito} = \min\left\{i \geq 1 : X_{T_1+i} = 1\right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

A las variables T_n las llamaremos tiempos de espera entre éxitos, y diremos que tienen distribución geométrica de parámetro p.



Vamos a estudiar cada una de ellas en más detalle.

La distribución binomial

El problema es encontrar una fórmula para la probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos de Bernoulli (por lo tanto independientes).

Esto se puede resolver analizando un árbol de probabilidades con todos los resultados posibles en n ensayos. La Figura 1 muestra el árbol para $n = 4$.

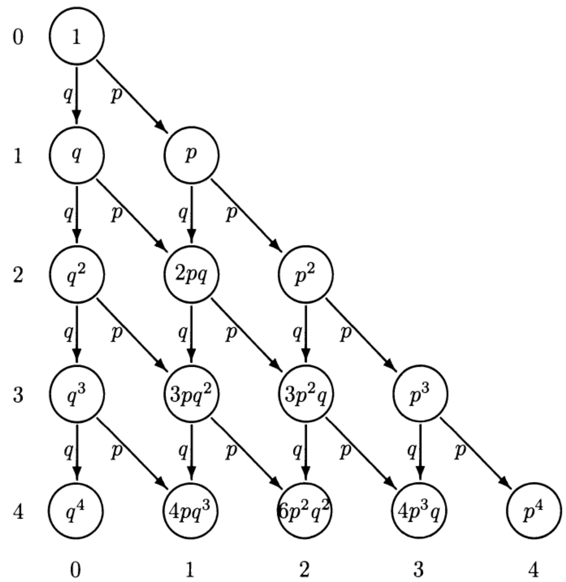


Figura 1: Árbol de probabilidades para obtener la fórmula de la distribución binomial.

Cada camino hacia abajo n pasos en el árbol representa un resultado posible de los primeros n ensayos del proceso. El k-ésimo nodo de la fila n representa el evento

$$\{S_n = k\} = \{k \text{ éxitos en } n \text{ ensayos}\}.$$

La expresión dentro de cada nodo es su probabilidad en términos de p y $q = 1 - p$. Esta expresión es la suma de las probabilidades de todos los caminos que llevan a ese nodo. Por ejemplo, en la fila 3 las probabilidades de $k = 0, 1, 2, 3$ éxitos en $n = 3$ ensayos son los términos de la expansión

$$1 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3.$$

Para $k = 0$ o 3 hay solo un camino que lleva a k éxitos, y por eso las probabilidades son q^3 y p^3 usando la regla del producto de probabilidades. Para $k = 1$ el factor 3 aparece porque hay 3 maneras de obtener exactamente un éxito en tres ensayos, 001, 010 y 100, representados por los tres caminos en el árbol que llegan al segundo nodo de la fila 3. Las probabilidades de estos caminos son qqp, qpq, y pqq respectivamente, y por eso la suma resultante es $3pq^2$.

Podemos imaginar al árbol dibujado para una cantidad arbitraria n de ensayos. Para obtener k éxitos en n ensayos, el camino debe moverse a la derecha k veces, correspondiendo a los k éxitos, y $n - k$ veces directo hacia abajo.[3] La probabilidad de cada uno de estos caminos es

[3] Cada 1 representa un movimiento hacia abajo y a la derecha en el árbol. Del mismo modo, cada 0 representa un movimiento directo hacia abajo.

el producto de k veces p y $n-k$ veces q, lo cual es $p^k(1-p)^{n-k}$, sin importar el orden de los movimientos. Luego la probabilidad de k éxitos en n ensayos es igual a $p^k(1-p)^{n-k}$ multiplicado por la cantidad de caminos que llevan a dicho nodo. Deben haber k unos en n lugares, y basta elegir los lugares en dónde ponerlos. Así la cantidad de caminos es $\binom{n}{k}$.

Distribución binomial

La función de probabilidad puntual (fpp) de S_n es

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \le k \le n) \tag{4}$$

Este modelo se llama *distribución binomial* de parámetros n y p. Para abreviar escribimos $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Notar que por el binomio de Newton, la suma de las probabilidades de la fpp de S_n es igual a 1:

$$\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Ejemplo 1 Calcular la probabilidad de obtener 4 o más caras en 6 lanzamientos de una moneda justa ($p = 1/2$).

Llamemos éxito a obtener cara. En 6 lanzamientos, la probabilidad de obtener al menos 4 caras es igual a

$$P(S_6 \ge 4) = P(S_6 = 4) + P(S_6 = 5) + P(S_6 = 6)$$

Usando la fórmula 4 de la binomial, vemos que

$$P(S_6 = k) = \binom{6}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{6-k}} = \binom{6}{k} / 2^6 \quad (0 \le k \le 6).$$

Luego

$$P(S_6 \ge 4) = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{2^6} = \frac{15 + 6 + 1}{32} = \frac{11}{32}.$$

■

Ejemplo 2 Supongamos que 5 familias tienen 6 hijos cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 familias tengan 4 o más hijas mujeres? Asumimos que cada hijo puede ser mujer o varón con igual probabilidad.

La probabilidad de que cada familia particular tenga 4 o más hijas mujeres es $11/32$ por el ejemplo anterior. Llamemos ahora éxito a que una familia tenga 4 o más hijas mujeres. Entonces, nuestra nueva variable S_5 indica la cantidad de familias con 4 o más hijas mujeres entre las 5 familias consideradas.

La probabilidad que buscamos es

$$P(S_5 \geq 3) = P(S_5 = 3) + P(S_5 = 4) + P(S_5 = 5)$$

Usando la fórmula de la binomial con probabilidad de éxito $p = 11/32$ esta probabilidad es igual a

$$\binom{5}{3}\left(\frac{11}{32}\right)^3\left(\frac{21}{32}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{11}{32}\right)^4\left(\frac{21}{32}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{11}{32}\right)^5\left(\frac{21}{32}\right)^0$$

Es decir $P(S_5 \geq 3) = 0.226$. ■

Si la cantidad de ensayos n es moderadamente grande, calcular una probabilidad binomial puede ser bastante engorroso. En esos casos es útil usar las tablas de la binomial que se encuentran a disposición en la página del curso. Las mismas contienen la fda binomial para varios valores de n y p.

Ejemplo 3 Se lanza una moneda justa 20 veces, y se sabe que hubo 12 caras. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el primer lanzamiento haya sido cara?

Llamemos S_{20} al número de caras en 20 lanzamientos de una moneda justa. Sabemos que el evento $\{S_{20} = 12\}$ ha ocurrido, pero no sabemos en cuáles lanzamientos han ocurrido las caras.

Sea X_1 la variable Bernoulli que indica si el primer lanzamiento es cara. Estamos interesados en la probabilidad

$$P(X_1 = 1 | S_{20} = 12) = \frac{P(X_1 = 1, S_{20} = 12)}{P(S_{20} = 12)}.$$

Por un lado podemos calcular $P(S_{20} = 12)$ usando la fórmula de la binomial con $n = 20$ y $k = 12$, lo cual da $\binom{20}{12}/2^{20}$.

¿Cómo podemos calcular $P(X_1 = 1, S_{20} = 12)$? El truco está en darse cuenta que

$$S_{20} = X_1 + S_{19}$$

en donde S_{19} cuenta el número de caras en los 19 lanzamientos restantes. Además, y esto es muy importante, S_{19} y X_1 son independientes.

Entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, S_{20} = 12) &= P(X_1 = 1, X_1 + S_{19} = 12) \\ &= P(X_1 = 1, S_{19} = 11) \\ &= P(X_1 = 1)\, P(S_{19} = 11) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{19}{11}}{2^{19}} = \frac{\binom{19}{11}}{2^{20}}. \end{aligned}$$

La probabilidad condicional que buscamos es $\binom{19}{11}/\binom{20}{12} = 12/20$. ■

¿Se te ocurre algún argumento sencillo que de el mismo resultado?

Esperanza y varianza de la distribución binomial

Si $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, entonces

$$E(S_n) = np \quad \text{y} \quad Var(S_n) = np(1-p).$$

Recordar que la esperanza y la varianza de una variable Bernoulli de parámetro p son p y $p(1-p)$ respectivamente.

Demostración. Si denotamos por X_i la variable Bernoulli que indica si hay éxito en el i-ésimo ensayo, entonces

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Esto permite usar el mismo truco que nos ayudo a calcular la esperanza en varios de los ejemplos de las clases pasadas: la linealidad de la esperanza. Como $E(X_i) = p$ y la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas, vemos que $E(S_n) = np$.

Además las $X_i's$ son mutuamente independientes. Entonces

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) \\ &= p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p) \end{aligned}$$

Notar que este cálculo es mucho más simple que usar la definición. □

Ejemplo 4 Consideremos un juego similar al 5 de Oro, en el cual hay que embocar 5 números del 1 al 48. La probabilidad de ganar es

$$p = \frac{1}{\binom{48}{5}} = \frac{1}{1,712,304} \approx 5.84 \times 10^{-7}.$$

Si todos los habitantes de Uruguay deciden jugar, y asumiendo que hay $n = 3,529,014$ habitantes en Uruguay[4], y que cada uno elige una combinación al azar, entonces esperamos ver

$$np = \frac{3,529,014}{1,712,304} \approx 2.06$$

ganadores en promedio por juego. ■

[4] Esto es según Wikipedia al día en que se escriben estas notas.

La distribución geométrica

El problema ahora consiste en calcular una fórmula para la distribución de los tiempos de espera T_n. Recordar que T_n indica el tiempo que debemos esperar entre el n-ésimo y el $(n+1)$-ésimo éxito. Como los ensayos son independientes, todos los tiempos de espera tienen la misma distribución. Es decir, basta hallar la fpp de T_1, el tiempo de espera hasta el primer éxito.[5]

Sea p la probabilidad de éxito. Para simplificar, llamemos T al número de ensayos que realizamos hasta el primer éxito. Claramente T puede tomar los valores 1, 2, 3,....

¿Cuál es la función de probabilidad puntual de T? T vale k cuando los primeros $k-1$ ensayos resultan en fracaso, lo cual ocurre con probabilidad q^{k-1}, y además el k-ésimo ensayo resulta en éxito, lo cual ocurre con probabilidad p. Entonces $p(k) = pq^{k-1}$.

[5] El nombre de distribución geométrica se debe a que la función de probabilidad puntual está representada por una serie geométrica. No tiene nada que ver con las probabilidades geométricas que vimos al principio del curso. Un clásico ejemplo es lanzar una moneda hasta que salga cara.

Distribución geométrica

La función de probabilidad puntual (fpp) de T es

$$P(T = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (0 \leq k < \infty) \tag{5}$$

Este modelo se llama *distribución geométrica* de parámetro p. Para abreviar escribimos $T \sim \text{Geo}(p)$.

Observar que la suma es

$$\sum_{k \geq 1} p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

En la Figura 2 se muestran los gráficos de la función de probabilidad puntual de T para tres valores de p.

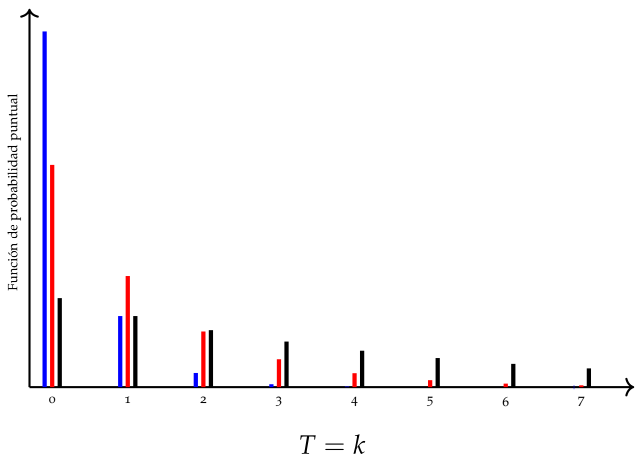


Figura 2: Distribución geométrica para tres valores de p: en azul $p = 0.8$, en rojo $p = 0.5$, y en negro $p = 0.2$.

Esperanza y varianza de la distribución geométrica

Si $T \sim \text{Geo}(p)$, entonces

$$E(T) = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad Var(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Demostración. La probabilidad de $\{T > k\}$ es $(1-p)^k$, pues una forma equivalente de describir este evento es que los primeros k lanzamientos sean fracaso.

Usando la fórmula de la esperanza para variables enteras positivas obtenemos

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

Por ejemplo, si la moneda es justa, se espera lanzar en promedio 2 veces la moneda para que salga cara.

Calculemos la varianza de T. De la definición tenemos

$$Var(T) = E\left(T^2\right) - E(T)^2 = E\left(T^2\right) - \frac{1}{p^2}.$$

Falta evaluar el primer término. Notar que éste se puede descomponer en

$$E\left(T^2\right) = E(T(T-1)) + E(T) = E(T(T-1)) + \frac{1}{p}.$$

La esperanza de $T(T-1)$ es por definición igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} &= p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\ &= p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1}{p}\right].\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$E\left(T^2\right) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Juntando todo, nos queda

$$Var(T) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Hemos probado entonces que la varianza de una variable geométrica es $(1-p)/p^2$. $\square$

Antes de seguir con los ejemplos, respondamos a la siguiente pregunta de carácter más general. Sea $T \sim \text{Geo}(p)$, ¿cuál es el valor de m para el cual $P(T \leq m) \approx 1/2$?

Como ya hemos visto,

$$P(T \leq m) = 1 - P(T > m) = 1 - (1-p)^m$$

El número $(1-p)^m$ no tiene porque ser exactamente igual a $1/2$, pero podemos buscar el menor valor de m que cumple $P(T \leq m) \geq 1/2$.

Por un lado

$$\begin{aligned}1 - (1-p)^m \geq 1/2 \Leftrightarrow (1-p)^m \leq 1/2 \Leftrightarrow m\ln(1-p) \leq -\ln(2) \\ \Leftrightarrow m \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1/(1-p))}.\end{aligned}$$

Por otro, como $P(T \leq m-1) < 1/2$ tenemos que

$$1 - (1-p)^{m-1} < 1/2 \Leftrightarrow m < \frac{\ln(2)}{\ln(1/(1-p)} + 1.$$

Es decir, que

$$m = \left\lfloor \frac{\ln(2)}{\ln(1/(1-p)} \right\rfloor.$$

Notar que cuando p es chico $m \approx \ln(2)/p$, valor similar a la esperanza que calculamos antes.

El número m se llama *mediana* de la distribución de T, o simplemente mediana de T. Es el valor que aproximadamente divide en dos partes iguales la distribución: la probabilidad de que T sea menor o igual que m es casi $1/2$, y lo mismo para la probabilidad de que sea mayor. Es una forma conveniente de definir un "valor representativo" para T, diferente al valor esperado.

Definición de mediana

Sea X una variable aleatoria cualquiera. La mediana de X es el menor valor de m que cumple $P(X \leq m) \geq 1/2$.

Ejemplo 5 Volvamos al juego similar al 5 de Oro, en el cual hay que embocar 5 números del 1 al 48. La probabilidad de ganar es

$$p = \frac{1}{\binom{48}{5}} = \frac{1}{1,712,304} \approx 5.84 \times 10^{-7}.$$

Supongamos que jugamos hasta ganar. Sea T el número de veces que jugamos. Entonces T tiene distribución geométrica de parámetro p.

De la discusión anterior, la mediana y la esperanza de T son

$$m \approx 1,186,879, \quad E(T) = 1,712,304.$$

Si jugáramos dos veces por semana, m equivale a jugar aproximadamente ¡11,412 años! Uno se pregunta porqué tanta gente juega a este tipo de loterías. Lo atractivo del juego es que por un boleto relativamente barato uno podría ganar un premio capaz de cambiarle la vida.

Esto debemos interpretarlo de la siguiente manera: si toda la población de Uruguay jugara una vez por semana, eventualmente hasta ganar, la mitad de la población debería jugar 11,412 años.

Supongamos que una persona vive 75 años, y que juega una vez por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane al menos una vez? Si traducimos esta pregunta en término de T, queremos calcular $P(T \leq 3900)$, pues hay 3900 semanas en 75 años. Esto da

$$P(T \leq 3900) = 1 - (1-p)^{3900} \approx 0.0023.$$

En porcentajes es aproximadamente 0.23 %. Por lo menos es un número más razonable, pero el 99.77 % de la población nunca ganaría. Para disfrutar de la fortuna del premio, uno debería ganarlo a una edad tipo 40 años, y las chances son en este caso menores a 0.02 %. ■

Aplicación al lanzamiento de una moneda

Cuando $p = 1/2$ se trata de la moneda justa que hemos estado usando en algunos de los ejemplos. La interpretación de las probabilidades predice en este caso que el número de éxitos será parecido al de fracasos, al menos cuando n es grande. Pero ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean iguales? Primero que nada, esta probabilidad es cero a no ser que n sea par. Pongamos entonces $n = 2m$ y llamemos a esta probabilidad q_m.[6]

Comencemos con $m = 1$. Si lanzamos dos veces la moneda, misma cantidad de éxitos que fracasos quiere decir uno de cada: EF o FE. Como cada una tiene probabilidad $1/4$ tenemos $q_1 = 1/2$. Para $m = 2$ sirven 6 secuencias de 16, por lo que $q_2 = 3/8$. En general, deben haber m éxitos en $2m$ ensayos, por lo que de la ecuación (4) resulta

$$q_m = P(S_{2m} = m) = \binom{2m}{m} \frac{1}{2^{2m}}. \tag{6}$$

Este número parece un poco intratable. La siguiente tabla muestra los primeros 5 valores. Para facilitar las comparaciones, en la última fila se especifican las probabilidades en forma de fracciones con el mismo denominador. Se puede observar que las probabilidades disminuyen a medida que aumenta el número de lanzamientos, por lo menos en la parte de la serie que aparece en la tabla.

$2m$	2	4	6	8	10
q_m	$1/2$	$3/8$	$5/16$	$35/128$	$63/256$
Denominador común	$128/256$	$96/256$	$80/256$	$70/256$	$63/256$

Siempre es útil detectar la existencia de patrones. Al pasar de dos lanzamientos a cuatro, la segunda respuesta ($3/8$) es $3/4$ por la primera ($1/2$). De cuatro lanzamientos a seis, la segunda respuesta ($5/16$) es $5/6$ por la primera ($3/8$); análogamente, de seis a ocho, el factor es $7/8$. Los factores sucesivos son:

$$3/4, \quad 5/6, \quad 7/8.$$

¡Qué maravilla! 3, 4, 5, 6, 7, 8: es algo más que una simple coincidencia. Con un poco de fe, podemos predecir, que al pasar de ocho a diez lanzamientos, la probabilidad de obtener números iguales de éxitos y fracasos queda reducida en un factor $9/10$. Y así es, como puede verse en la tabla.

El patrón se mantiene para números más elevados, la probabilidad disminuye progresivamente. El siguiente valor se obtiene siempre multiplicando por una fracción menor que uno:

$$q_m = P(S_{2m} = m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m}. \tag{7}$$

Los matemáticos de fines del renacimiento se fascinaban con este tipo de productos. En 1655 el matemático John Wallis publicó la siguiente fórmula para π:[7]

[6] *Responder intuitivamente:* ¿qué ocurre con q_m a medida que m crece? ¿Es cada vez más grande?

[7] ¿Qué hace π ahí? Al ver por primera vez una expresión como la del producto de Wallis, uno se pregunta ¿qué tiene que ver π en todo esto? El número π aparece siempre que haya un círculo en la vuelta, y aunque parezca increíble, detrás del producto de Wallis hay un círculo escondido. No vamos a hacer una prueba de la igualdad (8), pero les sugerimos a aquellos interesados entrar a

`https://www.youtube.com/watch?v=8GPy_UMV-08`

en donde pueden ver un el excelente video explicativo. El video está en inglés, pero se pueden activar los subtítulos en español. Para entenderlo solo se requiere andar fresco con conceptos básicos de números complejos.

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Para ser más precisos, consideremos los números de Wallis

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \\ W_2 &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \\ &\vdots \\ W_m &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdots \left(\frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}\right) \end{aligned}$$

El producto de Wallis dice que $\lim_{m\to\infty} W_m = \pi/2$. En cada número de Wallis los enteros aparecen dos veces, excepto el último denominador. Si tomamos la raíz cuadrada resulta entonces

$$\sqrt{W_m} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m+1}} = \frac{1}{q_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m+1}}.$$

De aquí, usando (8), concluimos otra maravilla escondida en el lanzamiento de una moneda:

> la probabilidad q_m de que en m éxitos y m fracasos ocurran en $2m$ lanzamientos de una moneda justa es aproximadamente igual a $1/\sqrt{\pi m}$.

En particular $q_m \to 0$ cuando m tiende a infinito.

¿Contradice esto la interpretación de las probabilidades como frecuencias relativas? Que en un millón de lanzamientos se produzcan 500.000 éxitos y 500.000 fracasos parece poco esperable. Todo cambia cuando hablamos de un porcentaje alrededor del valor central. Por ejemplo, si queremos que el número de éxitos esté entre el 49 % y el 51 % del total. En un experimento de 100 lanzamientos, se trata por tanto de que salgan 49, 50 o 51 éxitos. Si se repite este un gran número de veces, alrededor del 24 % de ellas se obtendrá que la proporción de éxitos cae en ese pequeño intervalo.

Con 1.000, se trata de que salgan entre 490 y 510 éxitos, lo cual sucede en un 50 % de los casos. Con 10.000 lanzamientos, el intervalo se sitúa entre 4.900 y 5.100, y el éxito nos acompaña en más del 95 % de los casos. Con un millón de lanzamientos, el intervalo es entre 490.000 y 510.000, lo cual ocurre casi siempre.

Lanzamientos	100	1.000	10.000	1 millón
Precisión	49-51	490-510	4.900-5.100	490 mil - 510 mil
Confianza	24 %	50 %	95 %	$\approx$ 100 %

El mismo razonamiento es válido cuando se endurecen las condiciones. Tal vez sea excesivo pedir que la proporción de éxitos se sitúe entre 49.9 % y 50.1 % cuando se hacen 1.000 lanzamientos (los únicos resultados posibles son 499, 500, y 501), pero no lo es para 10 millones.

La proporción de éxitos puede llegar a ser tan próxima a $1/2$ como se quiera. Esto es la precisión. Pero también está la confianza que tenemos en esa precisión, el porcentaje de veces que de hecho esa precisión ocurre.

Lo que no cabe esperar es que el número de éxitos sea igual al de fracasos, o que el número de éxitos se encuentre siempre dentro de un rango definido por un número fijo, por ejemplo 20, alrededor del centro, cuando se lanza una moneda al aire un millón de veces. De hecho se cumple lo contrario: si se lanza al aire una moneda un gran número de veces, la diferencia absoluta entre los números de éxitos y fracasos será tan grande como se quiera. Lo que se estabiliza es la proporción de éxitos.