Universidad de Murcia
Facultad de Matemáticas

Trabajo fin de grado

La ecuación del Calor

Mauro Milonga Miguel

Supervisado por
Gustavo Garrigós

Septiembre 2020

Declaración de originalidad

Mauro Milonga Miguel, estudiante del Grado en Matemáticas de la Universidad de Murcia, declara que el presente trabajo de fin de grado, tutorizado por el profesor Gustavo Garrigós, es original y que todas las fuentes utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

Firmado .... Fecha 15.08.2020

Índice general

Declaración de originalidad I

Lista de símbolos V

Resumen VII

Abstract XI

Capítulo 1. Formulación física de la ecuación del calor. Ejemplos 1
1. Formulación física de la ecuación del calor 1
2. Problema de valor inicial y frontera 3
3. Método de separación de variables 4
4. Ecuación del calor en una varilla 4

Capítulo 2. Ecuación del calor en $\mathbb{R}^d$ 17
1. Problema homogéneo 17
2. Problema no homogéneo 27

Capítulo 3. Resultados clásicos de unicidad 33
1. Ejemplo de Tychonoff 33
2. Formula del valor medio 35
3. Principio del máximo 40
4. Unicidad en dominios acotados 42
5. Unicidad en $\mathbb{R}^d$. El caso homogéneo 43
6. Unicidad en $\mathbb{R}^d$ con crecimiento gaussiano 45

Apéndice A. Resultados Auxiliares 49

Apéndice. Bibliografía 53

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$ - Números reales
$\mathbb{R}^d$ - Espacio euclídeo d-dimensional
$\mathbb{R}^3$ - Espacio euclídeo 3-dimensional
$\mathbb{R}^2$ - Espacio euclídeo 2-dimensional
$\mathbb{C}$ - Números complejos
$\mathbb{N}$ - Números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$
$\mathbb{Z}$ - Números enteros
$A \times B$ - Producto cartesiano de A y B.
C^∞ - Funciones indefinidamente diferenciables
C - Funciones continuas
$C^{1,2}_{t,x}$ - Funciones con primeras derivadas continuas en t y con segundas derivadas continuas en x
L^1 - Funciones Lebesgue-integrables
$\Im$ - Parte imaginaria
$\Re$ - Parte real
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ - Producto escalar en $\mathbb{R}^d$.
$\log a$ - Logaritmo de a en la base e.

Resumen

En el presente trabajo, hacemos un estudio sobre la Ecuación del Calor. Se trata de una de las tres Ecuaciones en Derivadas Parciales clásicas de la Física Matemática que empezó a ser desarrollada por Joseph Fourier en 1822. Su importancia se debe, en primer lugar, a que modeliza fenómenos físicos importantes en las aplicaciones, como la propagación (o difusión) de ciertas cantidades en el tiempo y el espacio (por ejemplo, la temperatura, la concentración de productos químicos, etc); y en segundo lugar, a nivel matemático, porque junto con las ecuaciones de Ondas y de Laplace, constituye uno de los modelos básicos de la teoría de las EDPs lineales, donde los métodos y herramientas que aparecen se pueden después llevar al estudio de EDPs más complejas.

Nuestro objetivo en este trabajo es abordar los siguientes aspectos: formulación física de la ecuación; encontrar soluciones explícitas en algunos ejemplos concretos, como la propagación del calor en varillas finitas (intervalos de $\mathbb{R}$); encontrar, a partir del concepto de solución fundamental, una solución explícita en $\mathbb{R}^d$, en los casos homogeneo y no homogeneo; presentar algunas propiedades importantes, como la fórmula del valor medio o los principios del máximo, y deducir de aquí teoremas de unicidad.

A continuación describimos con más detalle estos resultados. Supondremos que queremos estudiar la propagación del calor en un material físico confinado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a partir de unas condiciones iniciales y de frontera adecuadas. Denotaremos por $u(t,x)$ a la función temperatura en un punto $x \in \Omega$ tras t segundos.

En el primer capítulo, daremos en primer lugar una deducción física de la ecuación del calor. Usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones explícitas en algunos casos concretos de propagación del calor en una varilla de longitud l. En concreto trataremos de buscar $u(t,x)$, solución de los siguientes problemas de valor inicial y de frontera

a) condiciones de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t,x), & t>0, x\in(0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in (0,l) \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0, & t>0, \end{cases}$$

b) condiciones de tipo Neumman

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t,x), & t>0, x\in(0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x\in(0,l) \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) \equiv 0, & t>0. \end{cases}$$

Los resultados principales de este primer capítulo están recogidos en los Teoremas 1.4.6, 1.4.11 y 1.4.17.

En el segundo capítulo tratamos de encontrar soluciones explícitas a la ecuación del calor en $\mathbb{R}^d$ a partir del concepto de *solución fundamental.* Veremos que la función $\Phi : (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

conocida como núcleo de calor, o núcleo de Gauss-Weierstrass, es una solución fundamental de la ecuación del calor. Usaremos esta función para obtener una solución explícita al problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & en \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & en \quad \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.1}$$

así como para el problema de Cauchy no homogéneo

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & en \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & en \quad \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Además introduciremos la noción de transformada de Fourier de una función $u\in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y} u(x)dx$$

así como su inversa

$$\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} u(y)dy.$$

Esta herramienta, que no desarrollamos con detalle, nos da otra forma de encontrar soluciones explícitas para los problemas (0.0.1) y (0.0.2).

Los resultados principales del Capítulo 2 están recogidos en los Teoremas 2.1.16, 2.2.6 y 2.2.7.

En el capítulo 3, dedicaremos nuestra atención a presentar los resultados más importantes sobre unicidad. Un ejemplo clásico debido a Tychonoff, ver Teorema 3.1.8, nos muestra que no se puede esperar la unicidad en el problema de Cauchy (0.0.1), sin imponer condiciones adicionales en u.

Para probar teoremas de unicidad utilizaremos algunas versiones del principio del máximo, que en este trabajo vamos a obtener a partir de la fórmula del valor medio para la ecuación del calor. De forma más precisa,

Teorema 0.0.3 (Propriedad del valor medio para la ecuación del calor). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *y sea* $T > 0$. *Para toda* $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,T) \times \Omega)$ *solución de la ecuación del calor, se cumple*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \tag{0.0.4}$$

para cada $E(t,x;r) \subset (0,T) \times \Omega$.

En este teorema definimos las "bolas" del calor como

$$E(t,x;r) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : s \geq t, \Phi(t-s, x-y) \leq \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Por comodidad, en lo sucesivo denotaremos $D_T = (0,T) \times \Omega$.

Del teorema anterior deduciremos los siguientes principios del máximo.

Teorema 0.0.5 (Principio del máximo fuerte). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un dominio conexo, y sea* $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ *solución de la ecuación del calor en* $D_T = \Omega \times (0,T)$. *Si existe* $(t_0, x_0) \in D_T$ *tal que*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{D}_T} u(t,x)$$

entonces $u(t,x) \equiv u(t_0,x_0)$, $\forall\ (t,x) \in D_{t_0}$.

Corolario 0.0.6 (Principio del máximo débil). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *conexo y acotado, y sea* $D_T = (0,T) \times \Omega$. *Si* $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ *es tal que*

$$u_t = \Delta u \quad en \quad D_T = (0,T) \times \Omega,$$

entonces, para cada $t \in (0,T)$ *se tiene*

$$\max_{\overline{D}_t} u = \max_{\Gamma_t} u,$$

donde $\Gamma_t = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,t])$ *se denomina frontera parabólica de* D_t.

Veremos como el principio fuerte implica el principio del débil, y a partir de éste último obtendremos resultados de unicidad. En concreto probaremos que en dominios *acotados* el problema de Cauchy para la ecuación del calor tiene a la sumo una solución, ver Teorema 3.4.3.

En la última parte del Capítulo 3 abordamos los resultados más difíciles relacionados con las condiciones que garantizan la unicidad en el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^d$. En concreto, para el resultado más general que presentamos abajo, necesitaremos la siguiente variante del principio del máximo en dominios no acotados, para soluciones con una cota superior *gaussiana*.

Teorema 0.0.7 (Principio del máximo para el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^d$). *Sea* $g \in C(\mathbb{R}^d)$, *y sea* $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,T) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T) \times \mathbb{R}^d)$ *una solución del problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.8}$$

que además satisface la estimación

$$u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad (0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d) \tag{0.0.9}$$

siendo $A, a > 0$ constantes. Entonces

$$\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x).$$

A partir de aquí vamos a obtener el resultado que sigue, que finalizará los contenidos de este trabajo.

Teorema 0.0.10 (Unicidad del problema de Cauchy no homogéneo en $\mathbb{R}^d$). *Sean $g \in C(\mathbb{R}^d)$ y $f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$. Entonces, existe a lo sumo una solución $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ para el problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & 0 < t < \infty,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.11}$$

satisfaciendo la estimación

$$|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^d) \tag{0.0.12}$$

siendo $A, a > 0$ constantes.

A lo largo de esto trabajo hemos seguido principalmente los libros [**1**] y [**5**]. Las referencias precisas aparecen detalladas en cada capítulo.

Abstract

On the current essay, we made a study about the Heat Equation. This is one of three classical Partial Differential Equations in Mathematical-Physics. It was Joseph Fourier who started its study for the first time in 1822. Its importance is due, first, because it is an accurate model for many physical phenomena, such as the propagation (or diffusion) of certain quantities in time and space (for example, temperature, concentration of chemicals, etc); and secondly, also from a mathematical point of view, because it forms, together with Wave and Laplace equations, a basic model for the theory of linear PDEs, where the methods and tools used here, quite often lead to studies of more complex PDEs.

Our aim in this work is to cover the following topics: physical formulation of the equation; find an explicit solution in some concrete examples, such as the propagation of heat in finite rods; construct the fundamental solution, and from here obtain an explicit solution in $\mathbb{R}^d$ of the homogeneous and nonhomogeneous Cauchy problems; present some important properties, such as the mean value formula and the strong and weak maximum principles, and from them deduce several uniqueness theorems.

Next we describe in more detail these results. We want to study the propagation of heat on a physical material confined in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, from a known initial temperature and with appropriate boundary conditions. We denote by $u(t, x)$ the temperature function at a point $x \in \Omega$, after t seconds.

In the first chapter, we start with a physical deduction of the heat equation. We shall use the method of separation of variables to find explicit solutions for some concrete cases of propagation of heat in a rod of length l. More precisely we shall be looking for a solution $u(t, x)$ of the following boundary value problems

a) Dirichlet conditions

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t,x), & t > 0, x \in (0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in (0,l) \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0, & t > 0, \end{cases}$$

b) Neumman conditions

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t,x), & t > 0, x \in (0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in (0,l) \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) \equiv 0, & t > 0. \end{cases}$$

The main results of this chapter can be found in Theorems 1.4.6, 1.4.11 and 1.4.17.

In the second chapter we will be looking for explicit solutions for the heat equation in $\mathbb{R}^d$, which can obtained from the notion of *fundamental solution*. We will see that the function $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(t, x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

known as the heat kernel, or Gauss-Weierstrass kernel, is a fundamental solution for the heat equation. We will use this function to obtain an explicit solution for the homogeneous Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{in} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.13}$$

and also for the nonhomogeneous Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.0.14}$$

Furthermore we will introduce the notion of Fourier transform of a function $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y} u(x) dx$$

and also its inverse

$$\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} u(y) dy.$$

We shall not study the Fourier transform in detail, but we will use it to obtain, by different means, explicit solutions for the Cauchy problems (0.0.13) and (0.0.14).

The main results of this second chapter can be found Theorems 2.1.16, 2.2.6 and 2.2.7.

In the third chapter, we focus our attention in the most important uniqueness results. A classical example due to Tychonoff, see Theorem 3.1.8, shows that the Cauchy problem in (0.0.13) does not have a unique solution, unless additional conditions are put on the function u.

We will approach the uniqueness theorems via some versions of the maximum principle, which in this work we will obtain from the important mean-value formula for the heat equation. More precisely,

TEOREMA 0.0.15 (Mean-value property for the heat equation). *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ and $T > 0$. Suppose that $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,T) \times \Omega$ is a solution of the heat equation, then*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \tag{0.0.16}$$

for each $E(t,x;r) \subset (0,T) \times \Omega$.

In this theorem, we define the heat "ball" as

$$E(t,x;r) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : s \geq t, \Phi(t-s, x-y) \leq \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Also, in the sequel we shall use the convenient notation $D_T = (0,T) \times \Omega$. From the previous theorem we shall deduce the following maximum principles.

Teorema 0.0.17 (Strong maximum principle). *Let* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *be a connected domain and* $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ *be a solution of the heat equation on* $D_T = \Omega \times (0,T)$. *Suppose also that there exists* $(t_0, x_0) \in D_T$ *such that*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{D}_T} u(t,x).$$

Then $u(t,x) \equiv u(t_0,x_0)$, $\forall\ (t,x) \in D_{t_0}$.

Corolario 0.0.18 (Weak maximum principle). *Suppose that* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *is a bounded connected domain, and* $D_T = (0,T) \times \Omega$. *If* $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ *is such that*

$$u_t = \Delta u \quad en \quad D_T = (0,T) \times \Omega,$$

then, for each $t \in (0,T)$ *we have*

$$\max_{\overline{D}_t} u = \max_{\Gamma_t} u,$$

where $\Gamma_t = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,t])$ *is called parabolic boundary of* D_t.

We shall see how the strong maximum principle implies the weak maximum principle, and from this last result we shall obtain the uniqueness theorems. More precisely, we will prove that in bounded connected domains the Cauchy problem for the heat equation has at most one solution, see Theorem 3.4.3.

In the final part of Chapter 3 we deal with the most dificult results, which are related with conditions on u that guarantee the uniqueness for the Cauchy problem in $\mathbb{R}^d$. More precisely, to obtain the very general result that we present below, we shall use the following variant of the maximum principle in an unbounded domain, for solutions which satisfy a *gaussian* upper bound.

Teorema 0.0.19 (Maximum principle for the Cauchy problem in $\mathbb{R}^d$). *Let* $g \in C(\mathbb{R}^d)$, *and let* $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,T) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T) \times \mathbb{R}^d)$ *be a solution of the problem*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.20}$$

that additionally satisfies the estimate

$$u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad (0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d) \tag{0.0.21}$$

where $A, a > 0$ are constants. Then

$$\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x).$$

From this result we shall obtain the following general uniqueness criterion, which completes the list of results that we wish to cover in this work.

Teorema 0.0.22 (Uniqueness for the nonhomogeneuos Cauchy problem in $\mathbb{R}^d$). *Let $g \in C(\mathbb{R}^d)$ and $f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$. Then, there exist at most one solution $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ for the problem*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & 0 < t < \infty,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{0.0.23}$$

satisfying the estimation

$$|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^d) \tag{0.0.24}$$

with $A, a > 0$ constants.

Throughout this work we have mainly followed the books [**1**] and [**5**]. More precise references will appear in each chapter.

Capítulo 1

Formulación física de la ecuación del calor. Ejemplos

En este capítulo presentamos la formulación física para la ecuación del calor y algunos ejemplos concretos de su aplicación. Los resultados presentados siguen el libro [**5**] de Ireneo Peral Alonso *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, en las secciones 1.3 y 3.4, así como los apuntes [**3**] del curso de Gustavo Garrigós *Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier*, 2020.

1. Formulación física de la ecuación del calor

En la formulación de la ecuación del calor, usaremos la ley de Fourier (1.1.1) y el teorema de la divergencia de Gauss (Teorema A.0.2 en el apéndice).

Queremos estudiar la propagación del calor en un material físico que supondremos confinado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Para simplificar los cálculos vamos a considerar que el calor especifico c, la conductividad térmica k, y la densidad ρ del material físico son constantes, o sea, no varían de un punto a otro ni tampoco con la temperatura.

Definimos la función $u : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $u(t, x)$ es la temperatura del punto $x \in \Omega$ tras t segundos. Suponemos además que el material está sometido a una fuente externa de calor $f(t, x)$.

El gradiente de u

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right),$$

indica la dirección de máximo crecimiento de la temperatura. Es natural afirmar que el flujo de energía calorífica se transmite, de mayor temperatura a menor temperatura, es decir, de cálido a frío, y en la dirección de máximo decrecimiento.

Una formulación de este hecho, conocida como ley de Fourier, establece que el flujo $\vec{\Phi}$ de energía calorífica es proporcional al gradiente de las temperaturas, y se puede así escribir como:

$$\vec{\Phi} = -k \nabla u \tag{1.1.1}$$

donde $k > 0$ se denomina conductividad térmica del material.

Sea ahora x_0 un punto fijado de Ω y sea $B = B_r(x_0)$ una bola con clausura contenida dentro del material físico, $\overline{B} \subset \Omega$. La cantidad neta de calor que entra en B a través de su frontera ∂B en el instante de tiempo t es

$$Q_1 = - \int_{\partial B} \langle \vec{\Phi}, \vec{n} \rangle d\mu$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto escalar, $\vec{n}$ el vector normal exterior en ∂B, y $d\mu$ el elemento de área en ∂B.

Aplicando el teorema de la divergencia (Teorema A.0.2) y la ley de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\int_{\partial B} \langle\vec{\Phi},\vec{n}\rangle d\mu = -\int_B \operatorname{div}(\vec{\Phi})dx \\ &= -\int_B \operatorname{div}(-k\nabla u)dx = k\int_B (\nabla\cdot\nabla)u dx = k\int_B \Delta u\, dx. \end{aligned}$$

Si suponemos además que hay fuentes externas de calor, $f(t,x)$, éstas generan en el instante t un calor total en B dado por

$$Q_2 = \int_B f(t,x)dx.$$

Por otro lado, la expresión

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$$

representa la variación instantánea de temperatura con respecto al tiempo en cada punto x de B, y en el instante fijo t. Por tanto, la variación instantanea de la cantidad total de calor en B se puede escribir como

$$Q_3 = \int_B c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, dx$$

donde c es el calor especifico del material y ρ su densidad.

Así, para que haya equilibrio se debe tener

$$\begin{gathered} Q_3 = Q_1 + Q_2 \\ \int_B c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx = k\int_B \Delta u(t,x)\, dx + \int_B f(t,x)dx \\ \int_B c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx = \int_B \left[k\Delta u(t,x) + f(t,x)\right] dx. \end{gathered}$$

A continuación usaremos el siguiente lema.

Lema 1.1.2. *Si $F \in C(\mathbb{R}^d)$ entonces,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} F(x)dx = F(x_0)$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $\quad\exists\quad \delta(x_0,\varepsilon) > 0\quad$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

Por tanto, si $0 < r < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} F(x)dx - F(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} F(x)dx - \frac{F(x_0)}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} dx\right| \\ &\leq \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} |F(x) - F(x_0)|dx \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} \varepsilon dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Como la identidad de las integrales anteriores es cierta para todo $B = B_r(x_0) \subset \Omega$, haciendo r tender a 0, del Lema 1.1.2 deducimos, suponiendo que u y f son suficientemente suaves, que

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_0) = k\Delta u(t, x_0) + f(t, x_0)$$

para cada $t > 0$ y cada $x_0 \in \Omega$ fijos. Por tanto

$$c\rho u_t(t, x) - k\Delta u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Ahora, tomando $F(t, x) = (c\rho)^{-1} f(t, x)$ y $\alpha = (c\rho)^{-1} k > 0$, resulta

$$u_t - \alpha\Delta u = F(t, x) \tag{1.1.3}$$

La ecuación (1.1.3) es la ecuación del calor, también conocida como ecuación de difusión, y describe en las aplicaciones cómo se propaga $u(t, x)$, en el tiempo y en el espacio, para ciertas cantidades físicas como la temperatura, la concentración de productos químicos, etc...

2. Problema de valor inicial y frontera

En la mayoría de las aplicaciones se busca una solución única que satisfaga ciertas condiciones dadas. Habitualmente se supone conocida la temperatura inicial

$$u(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega.$$

Además, si Ω es un dominio acotado, se supone conocido el comportamiento de u en la frontera $\partial\Omega$, que suele corresponder a alguno de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Se denomina de esta forma cuando se conoce la temperatura $u(t, x)$ en la frontera $\partial\Omega$, que viene dada por

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Se busca entonces una función $u(t, x)$ que verifica las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t, x), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega \quad \longrightarrow \quad \textit{cond. inicial} \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & t > 0, x \in \partial\Omega \quad \longrightarrow \quad \textit{cond. de contorno} \end{cases}$$

Ejemplo 2: Condiciones de contorno de tipo Neumann. Se denomina de esta forma cuando se conoce el flujo de temperatura a través de la frontera. Recordando que, por la ley de Fourier, $\vec{\Phi} = -k\nabla u$, entonces el flujo de calor entrante a través de $x \in \partial\Omega$ en tiempo t viene dado por

$$k\nabla u \cdot \vec{n} = \psi(t, x),$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal exterior en $x \in \partial\Omega$. El problema resultante es

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = F(t, x), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega \quad \longrightarrow \quad \textit{cond. inicial} \\ k\nabla u \cdot \vec{n} = \psi(t, x), & t > 0, x \in \partial\Omega \quad \longrightarrow \quad \textit{cond. de contorno} \end{cases}$$

En el resto del capítulo demostraremos que, para una varilla unidimensional, es decir $\Omega = (0,l) \subset \mathbb{R}$, estos problemas admiten una solución explícita. Dicha solución se obtiene mediante el método de separación de variables, debido también a Fourier.

3. Método de separación de variables

En esta sección ilustramos el método de separación de variables para obtener soluciones de

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \tag{1.3.1}$$

para $t > 0$ y $x \in (0,l)$. Este método consiste en buscar soluciones particulares de la forma

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

Para tener una solución debe cumplirse que

$$u_t(t,x) = T'(t)X(x) \qquad y \qquad u_{xx}(t,x) = T(t)X''(x),$$

al sustituirse en (1.3.1), deben verificar la identidad

$$T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x)$$

Como buscamos soluciones no nulas, $u(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$, podemos escribir

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdad se verifica si, y solo si,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)} = \varrho,$$

para alguna constante ϱ, ya que se trata de funciones con variables distintas. Por tanto

$$\begin{cases} T'(t) = \varrho T(t) \\ \alpha X''(x) = \varrho X(x) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Para obtener $T(t)$ y $X(x)$ es suficiente resolver las EDOs en (1.3.2). Para ello es necesario traducir de forma adecuada las condiciones de contorno en el intervalo $[0,l]$. Veamos cómo hacerlo en algunos ejemplos concretos.

4. Ecuación del calor en una varilla

4.1. Varilla con extremos nulos.

Ejemplo 1.4.1. *Consideremos una varilla finita, de longitud l, sin fuentes de calor, y supongamos que es suficientemente fina de tal modo que la única posibilidad de cambio de calor con el exterior se da en los extremos y que estos tienen temperatura nula. Se pretende conocer la temperatura en la varilla, tras t segundos.*

Este problema se traduce en

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in [0,l] \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Usando el método de separación de variables, de (1.3.2) obtenemos,

$$\begin{cases} T'(t) = \varrho T(t) \\ \alpha X''(x) = \varrho X(x). \end{cases}$$

Por otro lado, imponiendo las condiciones de contorno vemos que

$$\begin{cases} u(t,0) = T(t)X(0) = 0 \implies X(0) = 0 \\ u(t,l) = T(t)X(l) = 0 \implies X(l) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, vamos a resolver en primer lugar la EDO de orden 2

$$\alpha X''(x) = \varrho X(x), \quad x \in (0,l), \quad \text{con} \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Analizamos los siguientes casos:

Caso 1: $\varrho = \lambda^2 > 0$, se tiene

$$X''(x) = \frac{\lambda^2}{\alpha} X(x)$$

es una EDO cuya solución es,

$$X(x) = A' e^{\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x} + B' e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x} = A \cosh(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x) + B \sinh(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x)$$

imponiendo las condiciones de contorno

$$X(0) = A = 0, \quad \text{y} \quad X(l) = 0 + B \sinh(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} l) = 0$$

Visto que $\sinh\theta \neq 0, \forall \theta \neq 0$, entonces $B = 0$. Por tanto, en este caso, no hay soluciones no nulas.

Caso 2: $\varrho = 0$. En este caso se tiene

$$X''(x) = 0 \implies X(x) = A + Bx$$

De nuevo, imponiendo las condiciones de contorno

$$X(0) = A = 0, \quad \text{y} \quad X(l) = 0 + Bl = 0$$

Visto que $l > 0$ se tiene $B = 0$, y por tanto, en este caso tampoco hay soluciones no nulas.

Caso 3: $\varrho = -\lambda^2 < 0$. En este caso

$$X''(x) = -\frac{\lambda^2}{\alpha} X(x)$$

tiene solución

$$X(x) = A \cos(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x) + B \sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno

$$X(0) = A = 0, \quad \text{y} \quad X(l) = 0 + B \sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} l) = 0$$

Visto que buscamos soluciones no nulas, debemos tener $B \neq 0$ y por tanto

$$\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}l) = 0, \quad \text{es decir} \quad \frac{\lambda l}{\sqrt{\alpha}} = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces λ debe pertenecer al conjunto

$$\lambda_n = \frac{n\pi\sqrt{\alpha}}{l}, \quad n \in \mathbb{N};$$

notar que tomamos $n \in \mathbb{N}$ para que las soluciones

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha}}x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

sean distintas.

A continuación, para cada una de estas funciones $X_n(x)$, buscamos una función $T(t) = T_n(t)$. La ecuación $T'(t) = \varrho T(t)$ tiene solución

$$T(t) = Ce^{\varrho t}$$

por tanto

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t} = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{l^2}t}.$$

Así, hemos obtenido

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{l^2}t} \sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad n \in \mathbb{N},$$

que forman una familia de soluciones particulares de la EDP

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,l) \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Aplicando el Principio de Superposición (es decir, la linealidad de la EDP), podemos decir que el candidato a la solución general del problema (1.4.2) es

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{l^2}t} \sin(\frac{n\pi}{l}x). \tag{1.4.3}$$

Ahora, imponiendo la condición inicial, resulta

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) = g(x) \tag{1.4.4}$$

para coeficientes b_n adecuados. Para determinar los b_n, *Fourier* propone utilizar ortogonalidad. Esta idea se resume como

“ *Si* $\vec{g} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{e}_n$, *donde* $\{\vec{e}_n\}$ *es una base orto-normal, entonces*

$$\langle \vec{g}, \vec{e}_m \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = b_m.\text{”}$$

Utilizaremos el siguiente lema de integración elemental.

Lema 1.4.5. *Para todo* $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *$m$ fijo, se tiene*

1. $\int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{l}{2} & si \quad n = m \end{cases}$

2. $\int_0^l \cos(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{l}{2} & si \quad n = m \neq 0 \\ l & si \quad n = m = 0 \end{cases}$

Demostración.

(1.a) Si $n \neq m$ usamos la relación $2\sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad \forall \theta_1, \theta_2$. Para calcular

$$\begin{aligned}
\int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left[\frac{(n-m)\pi}{l}x\right]dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left[\frac{(n+m)\pi}{l}x\right]dx \\
&= \left(\frac{l}{2(n\pi - m\pi)}\sin\left[\frac{(n-m)\pi}{l}x\right] - \frac{l}{2(n\pi + m\pi)}\sin\left[\frac{(n+m)\pi}{l}x\right]\right)\Bigg|_0^l \\
&= \frac{l}{2}\left(\frac{\sin[(n-m)\pi]}{[(n-m)\pi]} - \frac{\sin[(n+m)\pi]}{[(n+m)\pi]}\right) = 0
\end{aligned}$$

ya que $n \neq m$; $(n-m)\pi$ y $(n+m)\pi$ son múltiplos de π y, $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(1.b) Si $n = m$ usamos la relación $2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta), \quad \forall \theta$.

$$\int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx = \int_0^l \sin^2(\frac{n\pi}{l}x) = \frac{1}{2}\int_0^l dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos(\frac{2n\pi}{l}x)dx$$

$$\frac{1}{2}x\Big|_0^l - \frac{l}{4\pi n}\sin(\frac{2\pi n}{l}x)\Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

(2.a) Si $n \neq m$ usamos la relación $2\cos\theta_1\cos\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad \forall \theta_1, \theta_2$.

$$\begin{aligned}
\int_0^l \cos(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left[\frac{(n-m)\pi}{l}x\right]dx + \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left[\frac{(n+m)\pi}{l}x\right]dx \\
&= \frac{l}{2}\left(\frac{\sin[(n-m)\pi]}{[(n-m)\pi]} + \frac{\sin[(n+m)\pi]}{[(n+m)\pi]}\right) = 0.
\end{aligned}$$

(2.b) Si $n = m \neq 0$ usamos la relación $2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta), \quad \forall \theta$.

$$\int_0^l \cos(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx = \int_0^l \cos^2(\frac{n\pi}{l}x) = \frac{1}{2}\int_0^l dx + \frac{1}{2}\int_0^l \cos(\frac{2n\pi}{l}x)dx = \frac{l}{2}$$

(2.c) Si $n = m = 0$,

$$\int_0^l \cos(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx = \int_0^l dx = l$$

$\square$

Utilizando el Lema 1.4.5 en la identidad (1.4.4), vemos que formalmente se tiene

$$\int_0^l g(x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx = \frac{l}{2}b_n.$$

Para justificar el cambio de la integral con la suma, basta ver que las integrales son convergentes (Teorema A.0.5), y para ello podemos imponer una condición del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$. Por tanto, los coeficientes deben elegirse como

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx.$$

Usando esta expresión de b_n, hemos encontrado en (1.4.3) un candidato $u(t,x)$ a solución del problema de la varilla (1.4.2) Veamos ahora que este candidato es en efecto una solución suave, bajo ciertas hipótesis en la función $g(x)$. El teorema a seguir está en conformidad con lo que se ha enseñado en la clase de [**3**].

Teorema 1.4.6. *Sea $g(x) \in C([0,l])$ tal que se puede escribir como en (1.4.4), donde $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$. Sea*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad t \geq 0, x \in [0,l].$$

Entonces,

$$u \in C([0,\infty) \times [0,l]) \cap C^{\infty}((0,\infty) \times [0,l])$$

y resuelve el problema (1.4.2), o sea, es solución de,

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0,l) \\ u(0,x) = g(x) & x \in [0,l] \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0 & t > 0 \end{cases}$$

Demostración. Como

$$|u_n(t,x)| = \left| b_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\right| = |b_n||\sin(\frac{n\pi}{l}x)|e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t} \leq |b_n|$$

y por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$, entonces por el criterio de Weierstrass se tiene que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

es uniformemente convergente en todo $t \geq 0$ y todo $x \in [0,l]$. Y como $u_n(t,x) \in C([0,\infty) \times [0,l])$ entonces se tiene también que $u(t,x) \in C([0,\infty) \times [0,l])$.

Ahora, veamos que $\forall k, m$ existen las derivadas $\partial_t^k \partial_x^m[u(t,x)]$. Usaremos que $e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{l^2}t}$ decae a cero (cuando $n \to \infty$), más rápido que cualquier polinomio en n. Por simplicidad denotamos $\phi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)$ (o $\phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi}{l}x)$),

$$\left|\partial_t^k \partial_x^m u_n(t,x)\right| = \left| b_n \left(\frac{\alpha\pi^2 n^2}{l^2}\right)^k e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{l^2}t}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^m \phi_n(x)\right|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha\pi^2}{l^2}\right)^k \left(\frac{\pi}{l}\right)^m |b_n| n^{2(k+m)} e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{l^2}t}$$
$$\leq C_{k,m}|b_n|n^{2(k+m)}(n^2 t)^{-(k+m)} = C_{k,m}|b_n|t^{-(k+m)}$$

donde $C_{k,m}$ es constante. Observa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{k,m}|b_n|t^{-(k+m)} = \frac{C_{k,m}}{t^{(k+m)}}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$$

por tanto, se concluye que $u(t,x)$ es indefinidamente diferenciable $\forall t \in (0,\infty)$ y $x \in [0,l]$ y que podemos pasar las derivadas dentro de la serie (Teorema A.0.3). De este modo obtenemos:

$$u_t(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}\right) e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t} \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$
$$u_{xx}(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t} \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

y por lo tanto se cumple que $u_t(t,x) = \alpha u_{xx}(t,x)$.

Además

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) = g(x)$$

y se puede fácilmente verificar que

$$u(t,0) = u(t,l) = 0,$$

con lo cual se concluye la demostración.

□

4.2. Varilla con extremos aislados.

Ejemplo 1.4.7. *En el ejemplo anterior si se supone que en vez de nulos los extremos están aislados, resulta el siguiente problema:*

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & (t,x) \in (0,\infty)\times(0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in [0,l] \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) \equiv 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.4.8}$$

Para resolverlo usamos nuevamente el método de separación de variables. Por lo tanto, de (1.3.2) tenemos

$$T'(x) = \varrho T(t) \quad \text{y} \quad \alpha X''(x) = \varrho X(x).$$

Imponiendo las condiciones de contorno, en este caso obtenemos

$$\begin{cases} u_x(t,0) = T(t)X'(0) = 0 \\ u_x(t,l) = T(t)X'(l) = 0 \end{cases} \implies X'(0) = X'(l) = 0$$

Como antes, vamos a resolver en primer lugar la EDO

$$\alpha X''(x) = \varrho X(x), \quad x \in (0,l), \quad \text{con} \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Caso 1 $\varrho = \lambda^2 > 0$. Del mismo modo al hecho en el ejemplo anterior se puede comprobar que no hay soluciones no nulas.

Caso 2: $\varrho = 0$, se tiene

$$X''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(x) = A_0 + Bx$$

Imponiendo las condiciones de contorno queda $X'(0) = X'(l) = B = 0$, y por tanto

$$X(x) = A_0$$

Caso 3: $\varrho = -\lambda^2 < 0$, se tiene que

$$X''(x) = -\frac{\lambda^2}{\alpha} X(x)$$

tiene solución

$$X(x) = A\cos(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x) + B\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x)$$

entonces

$$X'(x) = -\frac{A\lambda}{\sqrt{\alpha}}\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x) + \frac{B\lambda}{\sqrt{\alpha}}\cos(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x).$$

Imponiendo las condiciones de contorno

$$\begin{cases} X'(0) = \frac{B\lambda}{\sqrt{\alpha}} = 0 & \Longrightarrow B = 0 \\ X'(l) = -\frac{A\lambda}{\sqrt{\alpha}}\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}l) = 0 \end{cases}$$

Como buscamos soluciones no nulas, debemos tener $A \neq 0$ y por tanto

$$\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}l) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda l}{\sqrt{\alpha}} = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces nuevamente λ debe pertenecer al conjunto $\lambda_n = \frac{n\pi\sqrt{\alpha}}{l}; \quad n \in \mathbb{N}$. Por tanto de los casos 2 y 3, se tiene que

$$X_n(x) = A_n\cos(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha}}x) = A_n\cos(\frac{n\pi}{l}x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para cada una de estas funciones, calculamos la función $T_n(t)$. De $T'(t) = \varrho T(t)$ se obtiene

$$T(t) = Ce^{\varrho t} \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t} = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{l^2}t}.$$

Por tanto, el candidato a solución del problema (1.4.8) queda

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi}{l}x) \tag{1.4.9}$$

Imponiendo el dato inicial, debe cumplirse

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{l}x) = g(x) \tag{1.4.10}$$

De modo que usando otra vez el argumento de ortogonalidad, el lema 1.4.5 nos permite concluir que

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Teorema 1.4.11. *Sea $g(x) \in C([0,l])$ tal que se puede escribir como en (1.4.10), donde $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ y,*

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi}{l}x), \quad t \geq 0, x \in [0,l].$$

Entonces,

$$u \in C([0,\infty)\times[0,l]) \cap C^{\infty}((0,\infty)\times[0,l])$$

y resuelve el problema (1.4.8), o sea, es solución de

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0,l) \\ u(0,x) = g(x) & x \in [0,l] \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) \equiv 0 & t > 0 \end{cases}$$

Demostración. La demostración de este teorema se puede computar de modo análogo a la demostración del teorema anterior.

□

4.3. El problema no homogéneo en un intervalo.

Ejemplo 1.4.12 (Caso no homogéneo). *Supongamos ahora que se trata de un problema donde hay fuentes de calor en el material, o sea $F(t,x) \neq 0$ y que además $F \in C([0,\infty)\times[0,l])$, con los extremos nulos, es decir $F(t,0) = F(t,l) = 0$, $\forall t \geq 0$. Suponiendo por simplicidad que $\alpha = 1$ en (1.1.3), podemos escribir este problema de la siguiente forma*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t,x), & (t,x) \in (0,\infty)\times(0,l) \\ u(0,x) = g(x), & x \in [0,l] \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.4.13}$$

Conjeturamos que la solución del problema (1.4.13) es de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x), \tag{1.4.14}$$

Para determinar $T_n(t)$, multiplicamos la ecuación $u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = F(t,x)$ por $\sin(\frac{m\pi}{l}x), m \in \mathbb{N}$ e integramos por partes dos veces, en $[0,l]$.

$$\begin{aligned} &\int_0^l u_t(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx = \\ &= \int_0^l u_{xx}(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx + \int_0^l F(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx \\ &= -\frac{m\pi}{l}\int_0^l u_x(t,x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx + \int_0^l F(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx \\ &= -\Big(\frac{m\pi}{l}\Big)^2\int_0^l u(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx + \int_0^l F(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx \end{aligned}$$

donde $u_x(t,l)\sin(m\pi) = 0 = u_x(t,0)\sin(0)$ y $u(t,l)\cos(m\pi) = 0 = u(t,0)\cos(0)$ por los datos iniciales. Ahora, sustituyendo $u(t,x)$, definido en (1.4.14), se tiene

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx =$$

$$= -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx$$

$$+ \int_0^l F(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx.$$

Suponemos que se puede permutar la suma con la integral, y usamos el lema 1.4.5 y obtenemos

$$T_m'(t) = -\lambda_m^2 T_m(t) + \frac{2}{l}\int_0^l F(t,x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx$$

donde $\lambda_m = \frac{m\pi}{l}, m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, de (1.4.14) se tiene que

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\frac{n\pi}{l}x) = g(x)$$

En estas condiciones, como ya vimos

$$c_n = T_n(0) = \frac{l}{2}\int_0^l g(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx.$$

Para obtener $T_n(t)$ basta resolver

$$\begin{cases} T_n'(t) = -\lambda_n^2 T_n(t) + q_n(t) \\ T_n(0) = c_n \end{cases} \tag{1.4.15}$$

donde

$$q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(t,x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$$

Calculando la solución de (1.4.15), buscamos primeramente soluciones de

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0.$$

Así

$$T_n(t) = \nu e^{-\lambda_n^2 t}$$

ahora, haciendo $\nu = \nu(t)$, calculamos $T_n'(t)$ y sustituimos en (1.4.15), es decir

$$T_n'(t) = \nu'(t)e^{-\lambda_n^2 t} - \lambda_n^2 \nu(t)e^{-\lambda_n^2 t}$$

por tanto

$$\nu'(t)e^{-\lambda_n^2 t} - \lambda_n^2 \nu(t)e^{-\lambda_n^2 t} = -\lambda_n^2 \nu(t)e^{-\lambda_n^2 t} + q_n(t)$$

entonces

$$\nu(t) = \int_0^t q_n(s)e^{\lambda_n^2 s}ds + C$$

para alguna constante C. Así

$$T_n(t) = \nu(t)e^{-\lambda_n^2 t} = e^{-\lambda_n^2 t}\int_0^t q_n(s)e^{\lambda_n^2 s}ds + Ce^{-\lambda_n^2 t}$$

imponiendo el dato $T_n(0) = \displaystyle\int_0^0 q_n(s)e^{\lambda_n^2 s}ds + C \quad \Longrightarrow \quad C = T_n(0) = c_n$ y, por lo tanto

$$T_n(t) = c_n e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)} q_n(s)ds.$$

Entonces, formalmente el candidato a solución del problema (1.4.13) se puede escribir como

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)} q_n(s)ds]\sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{1.4.16}$$

Ahora vamos a probar que este candidato es de hecho solución. Para ello demostramos en primer lugar el teorema siguiente, que utiliza herramientas introducidas en el curso [**3**]. Obsérvese que, por simplicidad, esta parte de la solución tiene condición incial nula

$$u(0,x) \equiv 0.$$

Teorema 1.4.17. *Sea* $F : [0,\infty)\times[0,l] \longrightarrow \mathbb{C}$*, tal que* $F \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times[0,l])$ *con* $F(t,0) = F(t,l) \equiv 0, \forall t \geq 0$*. Sea*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)} q_n(s)ds\right)\phi_n(x),$$

donde

$$q_n(s) = \frac{2}{l}\int_0^l F(s,x)\sin(\lambda_n x)dx, \quad \phi_n(x) = \sin(\lambda_n x) \quad y \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces se tiene que

$$u \in C([0,\infty)\times[0,l]) \cap C^{1,2}_{t,x}((0,\infty)\times[0,l])$$

y se cumple

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(t,x) & (t,x) \in (0,\infty)\times(0,l) \\ u(0,x) \equiv 0 & x \in [0,l] \\ u(t,0) = u(t,l) \equiv 0 & \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{1.4.18}$$

Demostración. Dado que $F \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times[0,l])$ para $T > 0$ fijo, existe $M = M_T$ tal que se tiene

$$M = \max_{0\leq t\leq T}\{\sup_{0<x<l}|F_{xx}(t,x)|\} < \infty$$

(1) Veamos que $|q_n(s)| \leq \dfrac{2M}{\lambda_n^2}, \quad \forall s \in [0,T]$

En efecto, integrando $q_n(s)$ por partes dos veces y, una vez que $F(t,0) = F(t,l) \equiv 0$ y $\sin(\lambda_n l) = \sin(0) = 0$, obtenemos

$$q_n(s) = \frac{2}{l}\left[-\frac{1}{\lambda_n}F(s,x)\cos(\lambda_n x)\right]_0^l + \frac{2}{\lambda_n l}\int_0^l F_x(s,x)\cos(\lambda_n x)dx$$

$$= \frac{2}{\lambda_n l}\left[\frac{1}{\lambda_n}F_x(s,x)\sin(\lambda_n x)\right]_0^l - \frac{2}{\lambda_n^2 l}\int_0^l F_{xx}(s,x)\sin(\lambda_n x)dx$$
$$= -\frac{2}{\lambda_n^2 l}\int_0^l F_{xx}(s,x)\sin(\lambda_n x)dx$$

Así

$$|q_n(s)| \leq \frac{2}{\lambda_n^2 l}\int_0^l |F_{xx}(s,x)||\sin(\lambda_n x)|dx$$
$$\leq \frac{2}{\lambda_n^2 l}\int_0^l \sup_{0<x<l}|F_{xx}(s,x)|dx = \frac{2}{\lambda_n^2 l}\|F_{xx}(s,\cdot)\|_\infty \int_0^l dx$$
$$= \frac{2}{\lambda_n^2}\|F_{xx}(s,\cdot)\|_\infty$$

(2) En seguida, veamos que $|A_n(t)| \leq \dfrac{2M}{\lambda_n^4}, \quad \forall t \in [0,T]$, donde

$$A_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)}q_n(s)ds.$$

En efecto, por **(1)** y haciendo cambio de variable $t-s=z$, se tiene

$$|A_n(t)| \leq \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)}|q_n(s)|ds \leq \frac{2M}{\lambda_n^2}\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-s)}ds$$
$$= -\frac{2M}{\lambda_n^2}\int_t^0 e^{-\lambda_n^2 z}du = \frac{2M}{\lambda_n^2}\int_0^t e^{-\lambda_n^2 z}du$$
$$= -\frac{2M}{\lambda_n^4}e^{-\lambda_n^2 z}\Big|_0^t = \frac{2M(1-e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^4} \leq \frac{2M}{\lambda_n^4}$$

(3) $|A_n'(t)| \leq \dfrac{4M}{\lambda_n^2}, \quad \forall t \in [0,T]$. Veamos que

$$A_n'(t) = -\lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t}\int_0^t e^{\lambda_n^2 s}q_n(s)ds + e^{-\lambda_n^2 t}e^{\lambda_n^2 t}q_n(t) = q_n(t) - \lambda_n^2 A_n(t)$$

Así

$$|A_n'(t)| \leq |q_n(t)| + \lambda_n^2|A_n(t)| = \frac{2M}{\lambda_n^2} + \lambda_n^2\frac{2M}{\lambda_n^4} = \frac{4M}{\lambda_n^2}$$

(4) Conclusión.

Usando $|\phi_n(x)| \leq 1$, $|\phi_n'(x)| \leq \lambda_n$, $|\phi_n''(x)| \leq \lambda_n^2$ y los pasos **(2)** y **(3)**, se puede concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial_t^k\partial_x^m[A_n(t)\phi_n(x)],$$

converge uniforme y absolutamente $\forall(t,x) \in [0,T]\times[0,l]$ con $k=0$ y $m=0,1,2$ o bien $k=1$ y $m=0$.

Por tanto, del Teorema A.0.3 se deduce que

$$u(t,x) \in C([0,T]\times[0,l]) \cap C_{t,x}^{1,2}([0,T]\times[0,l]), \quad \forall T>0.$$

Derivando termino a termino se comprueba que $u_t = u_{xx} + F(t,x)$, es decir,

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t [A_n(t)\phi_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n(t) - \lambda_n^2 A_n(t)]\phi_n(x)$$

y

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{xx} [A_n(t)\phi_n(x)] = -\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 A_n(t)\phi(\lambda_n x)]$$

por tanto

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n(t)\phi_n(x)] = F(t,x)$$

la convergencia de esta ultima serie es debido al teorema de la convergencia uniforme de series de *Fourier* (Teorema A.0.4).

$\square$

4.4. El problema no homogeneo con condición inicial general. Combinando el Teorema 1.4.6 y el Teorema 1.4.17 descubrimos que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(c_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-s)} q_n(s) ds \right) \sin(\lambda_n x) \right]$$

resuelve el problema (1.4.13) con las respectivas hipótesis sobre $g(x)$ y $F(t,x)$. En efecto,

$$u^1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \sin(\lambda_n x)$$

resuelve el problema (1.4.2) con $\alpha = 1$, y

$$u^2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-s)} q_n(s) ds \right) \sin(\lambda_n x) \right]$$

resuelve el problema (1.4.18), con c_n, $q_n(s)$, λ_n definidos anteriormente.

Se puede también computar del mismo modo la solución del problema no homogéneo para el caso de extremos aislados.

En el capítulo siguiente daremos construcciones de la solución de la ecuación del calor en la recta real o de modo general en $\mathbb{R}^d$, usando argumentos de homogeneidad y transformada de Fourier.

Capítulo 2

Ecuación del calor en $\mathbb{R}^d$

En este capítulo, trataremos de obtener la solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^d$. Empezaremos por el caso de dimensión $d = 1$, y en seguida estudiaremos de modo general el caso de dimensión $d \geq 2$; para esto usaremos dos métodos, primero un argumento de homogeneidad frente al cambio de escala, y como procedimiento alternativo, pero más avanzado, la transformada de Fourier. Los resultados que presentamos siguen fundamentalmente del estudio de los libros [**1**] de Lawrence Evans *Partial Differential Equations*, en las secciones 2.3 y 4.3, así como del libro [**5**] de Ireneo Peral *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, en la sección 6.1.

1. Problema homogéneo

Buscamos una expresión explícita $u(t,x)$ que sea solución de la EDP

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x), & \text{para } t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^d. \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

bajo condiciones adecuadas en $g(x)$. Comenzamos calculando una solución particular $\Phi(t,x)$, que denominaremos solución fundamental de la ecuación del calor.

1.1. Solución fundamental en dimensión $d = 1$. Usamos el método de *auto-semejanzas* para buscar candidatos a soluciones de

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0; \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1.2}$$

que además verifican la condición de normalización

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = 1, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.1.3}$$

Buscamos una relación entre $\lambda, \mu > 0$ tales que, si $u(t,x)$ es solución de (2.1.2) y (2.1.3), entonces también lo es la función reescalada

$$\tilde{u}(t,x) = \mu u(\lambda t, \mu x).$$

Operando,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \frac{\partial}{\partial t}(\mu u) = \mu \left[u_t \frac{\partial}{\partial t}(\lambda t) + u_x \frac{\partial}{\partial t}(\mu x) \right] = \mu\lambda u_t \\ \tilde{u}_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu u) = \mu \left[u_t \frac{\partial}{\partial x}(\lambda t) + u_x \frac{\partial}{\partial x}(\mu x) \right] = \mu^2 u_x \\ \tilde{u}_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu^2 u_x) = \mu^2 \left[u_{xt} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda t) + u_{xx} \frac{\partial}{\partial x}(\mu x) \right] = \mu^3 u_{xx}. \end{aligned}$$

Así, imponiendo $\lambda = \mu^2$

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = \mu^3(u_t - u_{xx}) = 0.$$

Además, haciendo cambio de variables $z = \mu x$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t,x)dx = \mu \int_{\mathbb{R}} u(\lambda t, \mu x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(\lambda t, z)dz = 1, \quad \forall\, t > 0.$$

Como consecuencia, podemos buscar soluciones que respeten la homogeneidad observada, es decir soluciones que dependan de la variable $r = t^{-1/2}x$. De forma más precisa, tomando $\lambda = t^{-1} \implies \mu = t^{-1/2}$, y sigue que el candidato buscado como solución es de la forma

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(1, \frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}} v(\frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}} v(r)$$

Buscamos pues una función de 1-variable, $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\tilde{u}(t,x) := \dfrac{1}{\sqrt{t}} v(\dfrac{x}{\sqrt{t}})$ cumpla (2.1.2) y (2.1.3). Operando

$$\tilde{u}_t = -\frac{1}{2t^{3/2}}(v(r) + \frac{x}{t^{1/2}}v'(r))$$

$$\tilde{u}_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{t}}v(r)) = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial r}{\partial x}v'(r) = \frac{1}{t}v'(r)$$

$$\tilde{u}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{t}v'(r)) = \frac{1}{t^{3/2}}v''(r).$$

Para que $\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = 0$ debemos tener,

$$-\frac{1}{2t^{3/2}}\Big(v(r) + \frac{x}{t^{1/2}}v'(r) + 2v''(r)\Big) = 0$$

$$v(r) + rv'(r) + 2v''(r) = 0$$

$$[rv(r)]' + [2v'(r)]' = 0$$

$$[rv(r) + 2v'(r)]' = 0$$

$$rv(r) + 2v'(r) = a.$$

Considerando el caso $a = 0$ se tiene,

$$rv(r) = -2v'(r)$$

Esta EDO tiene como solución

$$v(r) = ce^{-\frac{|r|^2}{4}}$$

La constante c la elegimos de modo que se cumple la normalización (2.1.3), es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t,x)dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} v(\frac{x}{\sqrt{t}})dx = \frac{c}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx = c\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{4}}dz = 1, \tag{2.1.4}$$

siendo $x = t^{1/2}z$. Para ello calculamos la integral de la derecha en el siguiente lema.

Lema 2.1.5.

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}dx = \sqrt{4\pi}.$$

Demostración. Elevando al cuadrado se tiene

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|^2}{4}} dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{4}} dxdy$$

Pasando a las coordenadas polares, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$; donde $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -(\rho \sin^2\theta + \rho\cos^2\theta) = -\rho$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |J| e^{-\frac{\rho^2}{4}} d\theta d\rho = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} d\theta d\rho = 2\pi \int_0^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} d\rho$$

$$= -4\pi e^{-\frac{\rho^2}{4}} \Big|_0^\infty = 4\pi.$$

Por lo tanto,

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = \sqrt{4\pi}.$$

□

Así, usando este lema en (2.1.4) obtenemos

$$c \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dx = c\sqrt{4\pi} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = (4\pi)^{-1/2}$$

Luego, la solución particular buscada es

$$\tilde{u}(t,x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Definición 2.1.6 (Solución fundamental para la ecuación del calor). *Se llama solución fundamental de*

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

a la función

$$\Phi(t,x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

También es conocida como núcleo de Gauss-Weirstrass o núcleo del calor. Más adelante veremos algunas propriedades de la solución fundamental.

A continuación veamos un lema que será útil para buscar la solución fundamental de la ecuación del calor en dimensiones superiores.

Lema 2.1.7. *Sea $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave radial, es decir $u(x) = v(r)$, con $r = |x|$. Entonces*

1. $\Delta u = \dfrac{d-1}{r} v' + v''$
2. $x \cdot Du = rv'$

Demostración. Sea $j = 1, 2, \cdots, d$, usamos la regla da cadena para calcular

$$u_{x_j} = v'(r)\frac{\partial r}{x_j} = v'(r)\frac{x_j}{r}$$

$$u_{x_j x_j} = v''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + v'(r)(\frac{r^2 - x_j^2}{r^3})$$

por tanto

$$\begin{aligned}\Delta u &= v''(r)\frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{r^2} + v'(r)\frac{dr^2 - \sum_{j=1}^d x_j^2}{r^3} \\ &= v''(r) + v'(r)\frac{d-1}{r};\end{aligned}$$

y también

$$x \cdot Du = \sum_{j=1}^d x_j v'(r)\frac{x_j}{r} = v'(r)\frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{r} = rv'(r)$$

□

1.2. Solución fundamental en dimensión $d > 1$. Buscamos una solución particular de la EDP

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.8}$$

que además verifique

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = 1. \tag{2.1.9}$$

Razonando por reescalamientos como en el caso anterior, se puede ver que la solución buscada debe tener la forma

$$u(t,x) = t^{-\alpha}v(\frac{x}{t^\beta}) \quad (t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d) \tag{2.1.10}$$

siendo $\alpha = \frac{d}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Operando obtenemos

$$\begin{aligned}u_t &= -\alpha t^{-(\alpha+1)}v(\frac{x}{t^\beta}) - \beta t^{-(\beta+1)}t^{-\alpha}x \cdot Dv(\frac{x}{t^\beta}) \\ &= t^{-(\alpha+1)}\left[-\alpha v(\frac{x}{t^\beta}) - \beta t^{-\beta}x \cdot Dv(\frac{x}{t^\beta})\right]\end{aligned}$$

y

$$\Delta u = t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(\frac{x}{t^\beta}).$$

Por tanto debemos tener

$$u_t - \Delta u = t^{-(\alpha+1)}[-\alpha v(y) - \beta y \cdot Dv(y)] - t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y) = 0, \tag{2.1.11}$$

donde $y = t^{-\beta}x$.

Sustituyendo $\alpha = \frac{d}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ en (2.1.11), se reduce a

$$dv(y) + y \cdot Dv(y) + 2\Delta v(y) = 0$$

Simplificamos tomando v una función radial, es decir $v(y) = w(|y|) = w(r)$ para alguna función $w : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Usando el lema 2.1.4 sigue que,

$$dw(r) + rw'(r) + 2\left(w''(r) + \frac{d-1}{r}w'(r)\right) = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por r^{d-1}, se tiene

$$dr^{d-1}w(r) + r^d w'(r) + 2\left[r^{d-1}w''(r) + (d-1)r^{(d-2)}w'(r)\right] = 0$$

$$(r^d w(r))' + 2(r^{d-1}w'(r))' = 0$$

$$\left(r^d w(r) + 2r^{d-1}w'(r)\right)' = 0$$

$$r^d w(r) + 2r^{d-1}w'(r) = a,$$

para alguna constante a. Considerando el caso $a = 0$ se tiene

$$w'(r) = -\frac{1}{2}rw(r),$$

y la solución de esta EDO es

$$w(r) = be^{-\frac{|r|^2}{4}}$$

Por tanto, $u(t,x) = be^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, donde se debe tener $b = (4\pi t)^{-d/2}$, de manera que se cumpla a condición de normalización en (2.1.9). Como consecuencia podemos definir

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

que denominamos solución fundamental de la ecuación del calor, o bien núcleo de Gauss-Weierstrass.

1.3. Propiedades de la solución fundamental $\Phi(t,x)$. El siguiente resultado resume las propiedades principales de $\Phi(t,x)$.

PROPOSICIÓN 2.1.12. *Para todo $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, se tiene*

1. $\Phi(t,x) > 0$
2. $\Phi_t(t,x) - \Delta\Phi(t,x) = 0$
3. $\Phi(t,x) \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$
4. $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x)dx = 1$
5. $\forall\delta > 0$ *se cumple*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta} \Phi(t,x)dx = 0$$

Demostración. 1 es evidente, y 2 se cumple por construcción.

3. $\Phi(t,x)$ es producto de dos funciones indefinidamente diferenciables $h_1(t) = (4\pi t)^{-d/2}$ y $h_2(t,x) = e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, con derivadas continuas en todas orden, para todo $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$.

4. Del lema 2.1.5 se tiene que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy = (4\pi t)^{1/2}$;

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x)dx = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} dx_j$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \underbrace{(4\pi t)^{1/2}(4\pi t)^{1/2} \ldots (4\pi t)^{1/2}}_{d-factores} = 1.$$

5. Haciendo un cambio de variable $x = t^{1/2}z$, calculemos

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta} \Phi(t,x)dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{|x|>\delta} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{d/2}}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{|z|>\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \lim_{t\to 0^+} \int_{|z|>\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz = 0.$$

La ultima integral es la cola de la función *gaussiana* que es convergente, por tanto su cola tiende a cero.

□

Observe que $\Phi(t,x)$ tiene una singularidad en $(0,0)$. Usualmente se dice que

$$\lim_{t\to 0^+} \Phi(t,x) = \delta(x) \tag{2.1.13}$$

donde $\delta(x)$ denota la "*función*" delta de Dirac. Matemáticamente $\delta(x)$ no puede ser caracterizado como una función que cumpla simultaneamente

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \neq 0 \\ \infty, & si \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\, dx = 1$$

Es sin embargo una herramienta que los físicos utilizan para explicar ciertos fenómenos; fue introducida por el físico-teórico Paul Dirac en su obra *The Principles of Quantum Mechanics*, en 1930. La fórmula (2.1.13) da una estrategia para definir matemáticamente $\delta(x)$ como límite de funciones gaussianas que se asemejan a $\delta(x)$ cuando $t \to 0^+$.

1.4. Solución de la ecuación del calor homogenea en $\mathbb{R}^d$. Consideremos ahora el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & en \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & en \quad \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Como hemos visto $\Phi(t,x)$ es solución de la ecuación del calor para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$, y claramente su traslación, $\Phi(t, x-y)$ es también solución de la ecuación del calor. Por tanto, un candidato a solución general es una combinación lineal de dichas traslaciones, escrita de forma integral como

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x-y)g(y)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \tag{2.1.15}$$

Cuando $t \to 0^+$, la propiedad (2.1.13) sugiere que, formalmente,

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x-y)\, g(y)\, dy \;=\; g(x),$$

y por tanto que $u(t,x)$ es de hecho un candidato a solución del problema de valor inicial (2.1.14). En el siguiente teorema demostramos rigurosamente este hecho. Hemos seguido la demostración de [**1**, Teorema 1, pág 47].

Teorema 2.1.16 (Solución del problema de Cauchy homogéneo). *Sea $g \in C(\mathbb{R}^d)$ y acotada, y $u(t,x)$ definida como en (2.1.15), entonces*

1. $u(t,x) \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$
2. $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^d)$
3. $\displaystyle\lim_{(t,x)\to(t,x_0)} u(t,x) = g(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
4. $|u(t,x)| \le \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$

Demostración. 1. Visto que $\Phi(t,x)$ es indefinidamente diferenciable, con derivadas continuas de todos los órdenes, y que tiene decaimiento gaussiano en x (para $t > 0$ fijo), se puede probar usando el lema de derivación de integrales paramétricas (Teorema A.0.6) que $u(t,x) \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, y que las derivadas de cualquier orden ∂_t^m, $\partial_{x_j}^k$ $j = 1,\ldots,d$, pueden pasarse sin problema dentro de la integral.

2. Esto es consecuencia de la observación anterior, y de la propiedad 2 de la solución fundamental $\Phi(t,x)$.

3. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fijo, $\varepsilon > 0$ y escogemos $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad si \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1.17}$$

Por tanto, si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, y una vez que $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,\cdot) = 1$. Tenemos,

$$|u(t,x) - g(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,x-y)g(y)dy - g(x_0) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) g(y) dy - g(x_0) \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&= \int_{B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) dy = \varepsilon,$$

de acuerdo con (2.1.17).

Además si $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| \geq \delta$, se tiene

$$|y - x_0| = |(y-x) + (x - x_0)| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|;$$

$$|y - x_0| \leq 2|y - x|. \tag{2.1.18}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) \sup_{y, x_0 \in \mathbb{R}^d} |g(y) - g(x_0)| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |g(y)| + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} |g(x_0)| \right] dy \\
&\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} \Phi(t, x-y) dy \\
&\leq \frac{C}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy
\end{aligned}
$$

usando la desigualdad (2.1.18),

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{C}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \\
&= C \int_{\mathbb{R}^d - B(x_0,\delta/\sqrt{t})} e^{-\frac{|z|^2}{16}} dy \longrightarrow 0; \quad t \longrightarrow 0^+
\end{aligned}
$$

En la ultima integral hicimos cambio de variable $t^{1/2} z = y - x_0$, y además converge a cero por ser la cola de una integral convergente. Por tanto, existirá $t_0 = t_0(\varepsilon, C) > 0$ tal que $I_2 < \varepsilon$ si $t \in (0, t_0)$. Concluimos que

$$|u(t,x) - g(x_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta/2 \text{ y } t \in (0, t_0)$$

lo que prueba el aserto 3.

4. Un cambio de variables nos permite escribir

$$|u(t,x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, x-y) g(y) dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, z) g(x-z) dz \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,z)|g(x-z)|dz \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,z) \sup_{x,z\in\mathbb{R}^d} |g(x-z)|dz$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,z)dz = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$$

$\square$

1.5. Método de la transformada de Fourier. La solución de la ecuación del calor homogénea también puede ser obtenida mediante la transformada de Fourier.

Definición 2.1.19 (Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$). *Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos su transformada de Fourier*

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y} u(x)dx, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

y su inversa

$$\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Estas integrales son convergentes una vez que $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$;

$$|\hat{u}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|dx < \infty, \quad y \quad |\check{u}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|dy < \infty.$$

Teorema 2.1.20 (Propiedades de la transformada de Fourier). *Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces*

1. $\widehat{(D^\alpha u)} = (i\xi)^\alpha \hat{u}(y)$, *si $u \in C^\infty$ es tal que $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall\alpha$*
2. $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{d/2}\hat{u}\hat{v}$, *donde $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dy$*
3. $\check{\hat{u}} = u = \hat{\check{u}}$, *si $u, \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$*
4. $\widehat{(ku)} = k\hat{u}$; *$k =$ constante*

Dado que no es objetivo de este trabajo hablar sobre la transformada de Fourier, no daremos la demostración de estas propriedades, pero si, fuera del interés del lector puede mirar el libro de Lawrence Evans *Partial Differential Equations*, 2ª edición, página 189 donde están demostradas las propriedades de 1-3. La última sigue de la definición de la transformada de Fourier y propiedades elementales de las integrales.

Considere nuevamente el problema homogéneo (2.1.14),

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Si para cada t fijo aplicamos la transformada de Fourier en la variable x tenemos

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,y) - \widehat{\Delta u}(t,y) = 0, & t > 0, \quad y \in \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}(0,y) = \hat{g}(y), & y \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Por la propiedad 1, si tiene

$$\hat{u}_t(t,y) - (i^2 \sum_{j=1}^{d} y_j^2)\hat{u}(t,y) = 0$$
$$\hat{u}_t(t,y) + |y|^2\hat{u}(t,y) = 0.$$

Integrando esta EDO con respecto a t, considerando y un parámetro fijo, se obtiene

$$\hat{u}(t,y) = \hat{g}(y)e^{-t|y|^2}.$$

Por la propriedad 2, si tomamos $\hat{G} = e^{-t|y|^2}$, se puede escribir

$$(2\pi)^{-d/2}(g * G)\hat{} = \hat{g}\hat{G}$$

por tanto

$$\hat{u} = (2\pi)^{-d/2}(g * G)\hat{}$$

Así, por las propiedades 3 y 4,

$$u(t,x) = \check{\hat{u}}(t,x) = (2\pi)^{-d/2}(g * G) \tag{2.1.21}$$

donde

$$G = \check{\hat{G}} = \left(e^{-t|y|^2}\right)\check{} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y}e^{-t|y|^2}dy = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y - t|y|^2}dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_jy_j - t|y_j|^2}dy_j = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{(2t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{2.1.22}$$

donde la integral (2.1.22) viene calculada en el lema siguiente. Por tanto (2.1.21) puede ser escrita como

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy$$

que es la solución de la ecuación del problema (2.1.14).

Lema 2.1.23. *Sea $t, x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy - t|y|^2}dy = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy - t|y|^2}dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^{1/2}y - \frac{x}{2t^{1/2}}i)^2 - \frac{|x|^2}{4t}}dy.$$

Imponiendo $z = t^{1/2}y - \dfrac{x}{2t^{1/2}}i$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy - t|y|^2}dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{1/2}} \int_{\gamma} e^{-z^2}dz.$$

donde γ denota el contorno $\{z : \Im(z) = -\dfrac{x}{2t^{1/2}}i\}$ en el plano complejo. Deformando γ en el eje real (ver Teorema A.0.8, y el ejemplo 1 en [**6**, pag 42-43]), obtendremos

$$\int_{\gamma} e^{-z^2}dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi},$$

donde la ultima identidad sigue del Lema 2.1.5. Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy-t|y|^2} dy = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

□

2. Problema no homogéneo

2.1. El problema no homogéneo con dato inicial nulo. Estudiemos primero la EDP no homogénea con dato inicial nulo, es decir

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t,x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.2.1}$$

donde por simplicidad vamos a imponer que $f \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ y tiene soporte compacto. Vamos empezar por escribir la solución fundamental,

$$\Phi(t-s, x-y) = \begin{cases} \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} & si \quad t-s > 0 \\ 0 & si \quad t \leq s \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Lema 2.2.3. *Sea Φ definida por (2.2.2), entonces*
(1) $\Phi_t - \Delta\Phi = 0 \quad si \quad t-s > 0$
(2) $\Phi_s + \Delta\Phi = 0 \quad si \quad t-s > 0.$

Se puede probar por cálculo directo que Φ verifica el lema anterior con respecto a t y a x en el apartado (1) y, como función de s y x en el apartado (2), lo cual es claro por tener s signo contrario a t. Además si el laplaciano fuera tomado con respecto a y también sigue verificando el lema.

Como ya vimos en casos anteriores, de igual modo Φ verifica el siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Sea Φ definida por (2.2.2), entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y) dy = 1 \qquad (t-s > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d)$$

Demostración. Para probarlo basta hacer un cambio de variables y obtendremos la integral de la función *gaussiana*,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y) dy &= \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dy \\ &= \frac{[4(t-s)]^{d/2}}{[4\pi(t-s)]^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2} dz = 1. \end{aligned}$$

□

En (2.2.1) para t fijo tomamos la transformada de Fourier en x.

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) + \hat{f}(t,\xi) & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0,\xi) = 0 & \xi \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Ahora, fijando ξ, llamo $U(t) = \hat{u}(t,\xi)$ y $F(t) = \hat{f}(t,\xi)$, sigue que

$$\begin{cases} U'(t) = -|\xi|^2 U(t) + F(t) \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo esta EDO en t, por el método de variación de las constantes, se obtiene

$$U(t) = \int_0^t F(s)e^{-|\xi|^2(t-s)}ds$$

Así

$$\hat{u}(t,x) = \int_0^t \hat{f}(s,\xi)e^{-|\xi|^2(t-s)}ds.$$

Tomando transformada de Fourier inversa,

$$\begin{aligned} u(t,x) = \check{\hat{u}}(t,x) &= \left(\int_0^t \hat{f}(s,\xi)e^{-|\xi|^2(t-s)}ds\right)^{\vee}(x) \\ &= \int_0^t \left(\hat{f}(s,\xi)e^{-|\xi|^2(t-s)}\right)^{\vee}(x)\,ds, \end{aligned}$$

donde el intercambio de integrales es formal, si bien se justifica por ser funciones continuas en un compacto. De igual modo al hecho anteriormente

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \Big(f(s,\cdot) * \Phi(t-s,\cdot)\Big)(x)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(s,y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}dyds. \end{aligned}$$

Por tanto

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)dyds \tag{2.2.5}$$

es un candidato a solución de (2.2.1). Para probar con rigor que este candidato es solución, seguimos la demostración de [**1**, Theorem 2, pág 50].

Teorema 2.2.6. *Sea u definida como en (2.2.5) y, $f \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto, entonces*

1. $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$
2. $u_t - \Delta u = f(t,x) \quad (t>0, x\in\mathbb{R}^d)$
3. $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d$

Demostración. 1. Es una consecuencia de las hipótesis sobre f. No obstante, dado que Φ tiene singularidad en $(0,0)$ no se puede justificar la diferenciación directamente sobre la integral. Haciendo un cambio de variables, escribimos

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)f(t-s,x-y)dyds$$

Como $f \in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ y tiene soporte compacto, podemos aplicar el Lema de derivación de integrales paramétricas, (Teorema A.0.6), y deducir que

$$u_t(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)f_t(t-s,x-y)dyds + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)f(0,x-y)dy$$

y

$$u_{x_ix_i} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) f_{x_ix_i}(t-s, x-y)dyds \qquad i = 1, 2, \ldots, d$$

Por tanto, u_t, $D_x^2 u$, así como u, $D_x u$ pertenecen a $C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$.

2. Calculamos por tanto

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) - \Delta u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) f(0, x-y)dy \\
&= \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) f(0, x-y)dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \right| \\
&\leq \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right| dyds \\
&\leq \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \left(|\frac{\partial}{\partial t} f(t-s, x-y)| + |\Delta_y f(t-s, x-y)| \right) dyds \\
&\leq \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty} \right) \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) dyds \\
&\leq C \int_0^{\varepsilon} ds = \varepsilon C.
\end{aligned}$$

Para I_2 consideramos primeramente la integral de abajo, usamos el teorema de *Fubini-Tonelli* (Teorema (A.0.10)), e integramos por partes con respecto a s,

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \frac{\partial}{\partial s} \Big[f(t-s, x-y) \Big] dyds &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y) f(0, x-y)dy \\
- \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)dy &- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\varepsilon}^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s,y) f(t-s, x-y)dy.
\end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos la integral siguiente, donde integramos dos veces por partes con respecto a y, obtiendo

$$\int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) \Delta_y [f(t-s, x-y)] dyds = \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^d} [\Delta_y \Phi(s,y)] f(t-s, x-y) dyds,$$

donde hemos usado el hecho de que f tiene soporte compacto. Deducimos de los dos cálculos anteriores que

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y) f(0, x-y)dy$$

$$+\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^d}\left[(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y)\Phi(s,y)\right]f(t-s,x-y)dyds$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy-I_3,$$

dado que Φ es solución de la ecuación del calor. Por tanto, haciendo $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}u_t(t,x)-\Delta u(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon C+\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy\right]\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)[f(t-\varepsilon,x-y)-f(t,x-y)]dy+\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t,x-y)dy\\ &=f(t,x),\end{aligned}$$

donde el primer límite utiliza la continuidad uniforme de f y $\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\varepsilon,y)dy=1$, mientras que el segundo límite usa la propiedad de aproximación de la identidad de $\{\Phi(\varepsilon,y)\}_{\varepsilon>0}$, de la misma forma que en la demostración de 3 en el Teorema 2.1.16.

3. Nota que

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x-y,t-s)f(s,y)dyds\right|\\ &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x-y,t-s)|f(s,y)|dyds\\ &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x-y,t-s)\sup_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^d}|f(s,y)|dyds\\ &= \|f\|_{L^\infty}\int_0^t ds=t\|f\|_{L^\infty}\longrightarrow 0;\quad t\to 0\end{aligned}$$

□

2.2. Solución del problema no homogéneo con dato inicial g. El siguiente teorema resuelve el caso no homogéneo para datos iniciales generales.

Teorema 2.2.7. *Sea $g\in C(\mathbb{R}^d)$ y acotada, $f\in C^{1,2}_{t,x}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto. Entonces la función*

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t,x-y)g(y)dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t-s,x-y)f(s,y)dyds$$

cumple $u\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\cap C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, y es solución del problema

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f(t,x) & t>0, x\in\mathbb{R}^d\\ u(0,x)=g(x) & x\in\mathbb{R}^d\end{cases}\tag{2.2.8}$$

Demostración. Llamamos

$$u^1(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t,x-y)f(y)dy$$

y

$$u^2(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t-s,x-y)f(s,y)dyds.$$

Como se ha visto en los Teoremas 2.1.16 y 2.2.6, la función u^1 es solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} u^1_t(t,x) - \Delta u^1(t,x) = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u^1(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

y u^2 resuelve

$$\begin{cases} u^2_t(t,x) - \Delta u^2(t,x) = f(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u^2(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Sumando ambas funciones el teorema sigue fácilmente.

□

Capítulo 3

Resultados clásicos de unicidad

En esta sección nuestro objetivo es presentar los resultados más importantes de unicidad de la ecuación del calor. La primera sección contiene el ejemplo de no unicidad de Tychonoff para el problema de Cauchy en $\mathbb{R}$. En la segunda sección probamos unicidad para dominios Ω acotados, usando el principio del máximo y la fórmula del valor medio. Finalmente en la tercera sección demostramos un criterio de unicidad en $\mathbb{R}^d$, que dice que ésta se cumple si pedimos que las soluciones sean acotadas, o incluso con crecimiento gaussiano. Como bases de estudio hemos utilizado los siguientes libros: [**1**] de Lawrence Evans *Partial Differential Equations*, sección 2.3; [**5**] de Ireneo Peral Alonso *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, secciones 6.1 y 6.2.

1. Ejemplo de Tychonoff

El ejemplo siguiente nos dice que no se puede esperar la unicidad sin condiciones adicionales; el mismo es debido a Tychonoff.

Ejemplo 3.1.1 (Tychonoff). *No unicidad de solución del problema de Cauchy para la ecuación del calor en* $\mathbb{R}$.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Una solución trivial es la solución nula. Queremos obtener otra solución de (3.1.2). Para ello usaremos el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(t,0) = g(t), & t \in \mathbb{R} \\ u_x(t,0) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Elegimos $g(t) = 0$, si $t \leq 0$ para que tengamos $u(0,x) = 0$, y buscamos una solución de (3.1.3) que se pueda escribir como

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) x^k. \tag{3.1.4}$$

Suponiendo regularidad suficiente, de manera que podemos pasar las derivadas dentro de la serie en (3.1.4) y sustituyendo en la ecuación del calor (3.1.3), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k'(t) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) g_k(t) x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) g_k(t) x^{k-2} \tag{3.1.5}$$

y para que verifique los datos en (3.1.3) elegimos,

$$g_0(t) = g(t) \quad y \quad g_1(t) = 0,$$

de (3.1.5) resulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k'(t)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)g_{k+2}(t)x^k$$

$$g_k'(t) = (k+1)(k+2)g_{k+2}(t) \quad \Longrightarrow \quad g_{k+2}(t) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}g_k'(t)$$

Por tanto,

- Si $\quad k = 2n+1, \quad g_k(t) = 0;$
- Si $\quad k = 2n, \qquad g_{2n}(t) = \dfrac{1}{(2n)!}\dfrac{d^n}{dt^n}g(t)$

Sustituyendo en (3.1.4) se obtiene,

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}g(t) \tag{3.1.6}$$

Así, por conveniencia elegimos g de manera que (3.1.6) sea de hecho una solución de (3.1.2)

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-2}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Claramente, $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $\dfrac{d^n}{dt^n}g(0) = 0$, con lo que se verifica $u(0,x) = 0$ en (3.1.2).

Ahora tenemos que verificar que (3.1.6) es convergente. Para ello, estudiemos el comportamiento de $\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$ como funciones de variables complejas, utilizando la fórmula integral de Cauchy (ver corolario A.0.9) sobre el contorno

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-t| = \theta t\},$$

con $\theta \in (0,1)$ a determinar. Se puede ver fácilmente que $g(z)$ es holomorfa si $\Re z > 0$, y en particular en un entorno que contiene al interior del círculo Γ.

De esta forma se tiene

$$\frac{d^n}{dt^n}g(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(z)}{(z-t)^{n+1}}dz$$

Si $z \in \Gamma, \quad z = t + \theta t e^{i\phi} \quad \Longrightarrow \quad dz = i\theta t e^{i\phi} d\phi \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\frac{d^n}{dt^n}g(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g(t+\theta t e^{i\phi})}{(\theta t e^{i\phi})^{n+1}}(i\theta t e^{i\phi})d\phi = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t+\theta t e^{i\phi})}{(\theta t e^{i\phi})^{n}}d\phi.$$

Ahora veamos que

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}g(t)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|g(t+\theta t e^{i\phi})|}{|\theta t e^{i\phi}|^n}d\phi = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|g(t+\theta t e^{i\phi})|}{(\theta t)^n}d\phi$$

Eligiendo θ suficientemente pequeño, de tal modo que

$$\Re[(1+\theta e^{i\phi})^{-2}] > \frac{1}{2}, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi]$$

tenemos

$$|g[t(1+\theta e^{i\phi})]| = |e^{-\frac{1}{t^2}\frac{1}{(1+\theta e^{i\phi})^2}}| = e^{-\frac{\Re[(1+\theta e^{i\phi})^{-2}]}{t^2}} \leq e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

por tanto

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}g(t)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\theta t)^n}d\phi = \frac{n!}{2\pi}\frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\theta t)^n}\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{n!}{(\theta t)^n}e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

Sustituyendo esta estimación en (3.1.6) tenemos,

$$|u(t,x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{d^n}{dt^n}g(t)\right|\frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\frac{n!}{(\theta t)^n}e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{2n}}{(\theta t)^n}\frac{1}{n!}e^{-\frac{1}{2t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{|x|^2}{(\theta t)}\right]^n\frac{1}{n!}e^{-\frac{1}{2t^2}} = e^{(\frac{|x|^2}{\theta t}-\frac{t^{-2}}{2})}$$

ya que por inducción matemática se comprueba que $(2n)! \geq (n!)^2$ y por *Taylor* se tiene que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Concluimos que la serie (3.1.4) es sumable en todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, y que $u(t,x)$ es continua y tiene regularidad para que se pueda pasar las derivadas dentro de la serie. Además, la sumabilidad es trivial para $t \leq 0$, donde sale $u(x,t) \equiv 0$, y de la estimación anterior se deduce también que

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.8. *Existe una función $u(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R})\cap C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$, no identicamente nula, y tal que*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En particular, el problema de Cauchy en (3.1.2) *no tiene unicidad.*

Demostración. Si suponemos que la unicidad es cierta en este caso, entonces tendría que ser $u \equiv 0$, pero el ejemplo de Tychonoff sirve como un contra-ejemplo. □

Más tarde, en el Teorema 3.6.9, veremos que cuando se imponen ciertas condiciones sobre el crecimiento de las soluciones, éstas son únicas.

2. Formula del valor medio

Definición 3.2.1. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un dominio abierto y acotado, con frontera $\partial\Omega$ regular (ver Definición A.0.1). Para $0 < T < \infty$ definimos el dominio producto*

$$D_T = \Omega \times (0,T),$$

y llamamos frontera parabólica de D_T al conjunto

$$\Gamma_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]). \tag{3.2.2}$$

Consideremos D_T como definido anteriormente y supongamos que $u(t,x)$ es solución de la ecuación del calor. A continuación presentamos la importante formula del valor medio que afirma: $u(t,x)$ es igual a la media ponderada de u en las "bolas" $E(t,x;r) \subset D_T$, definidas como sigue.

DEFINICIÓN 3.2.3. *Sea $x \in \mathbb{R}^d$ fijo, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ definimos*

$$E(t,x;r) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : s \leq t, \Phi(t-s,x-y) \leq \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Este conjunto es una región en el espacio-tiempo, cuya la frontera es un conjunto de nivel de $\Phi(t-s,x-y)$. Observa que el punto (t,x) coincide con el extremo superior de $E(t,x;r)$. Este conjunto $E(t,x;r)$ es conocido también como "*bola de calor*". A continuación veamos algunos resultados que van a ser útiles para demostrar el teorema siguiente.

Por la definición anterior, si $(s,y) \in E(t,x;r)$ se tiene

$$\frac{1}{(4\pi(t-s))^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^d}$$

$$r^d e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq (4\pi(t-s))^{d/2}.$$

Aplicando la función logarítmica, sigue

$$d \log r + \log e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{d}{2} \log(4\pi(t-s))$$

$$d \log r - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)} - \frac{d}{2} \log(4\pi(t-s)) \geq 0. \tag{3.2.4}$$

Llamando $z = x - y$, $\tau = t - s > 0$, de la desigualdad anterior se tiene que

$$\frac{|z|^2}{4\tau} \leq \log r^d - \log(4\pi\tau)^{d/2} = \frac{d}{2} \log \frac{r^2}{4\pi\tau}$$

$$|z|^2 \leq 2d\tau \, \log \frac{r^2}{4\pi\tau} =: R(\tau).$$

Por tanto, siempre que la expresión de la derecha sea > 0, la intersección de $E(t,x;r)$ con el plano s =cte será una bola en $\mathbb{R}^d$ con centro x y con radio

$$\sqrt{R(t-s)}.$$

Cuando $R(\tau) = 0$, dicha interesección se reducirá al punto $y = x$. Veamos cuándo se tiene $R(\tau) = 0$. Por un lado,

$$\lim_{\tau \to 0^+} R(\tau) = 0.$$

Por otro lado, si $\tau > 0$ entonces

$$R(\tau) = 0 \iff 4\pi\tau = r^2 \iff s = t - \frac{r^2}{4\pi}.$$

Es decir, si $(s,y) \in E(t,x;r)$ entonces

$$t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s \leq t. \tag{3.2.5}$$

Además, de la definición y los cálculos anteriores sigue que

$$E(t,x;r) = (t,x) + E(0,0;r),$$

Por lo tanto, usaremos la bola de calor $E(0,0;r)$ para algunos de los cálculos que siguen. Para demostrar el teorema abajo, seguimos la demostración de [**1**, Teorema 3, pág 53].

TEOREMA 3.2.6 (Propriedad del valor medio para la ecuación del calor). *Sea $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T)$ solución de la ecuación del calor, entonces*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \tag{3.2.7}$$

para cada $E(t,x;r) \subset D_T$.

Observe que en el miembro derecho de (3.2.7) solo involucra $u(s,y)$ para valores de $s \leq t$, y esto es razonable dado que $u(t,x)$ no puede depender de tiempos futuros.

DEMOSTRACIÓN. Un cambio de variables nos permite considerar $x = 0$ y $t = 0$. Sea $E(0,0;r) = E(r)$, escribimos

$$\phi(r) := \frac{1}{r^d} \iint_{E(r)} u(s,y) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

Haciendo un nuevo cambio de variables, $s = r^2 \bar{s}$ y $y = r\bar{y}$, se tiene

$$\phi(r) := \iint_{E(1)} u(r^2\bar{s}, r\bar{y}) \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}^2} d\bar{y}d\bar{s}.$$

Calculamos su derivada

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &:= \iint_{E(1)} (\sum_{j=1}^{d} u_{\bar{y}_j}\bar{y}_j + 2r\bar{s}u_{\bar{s}}) \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}^2} d\bar{y}d\bar{s} \\
&= \iint_{E(1)} \sum_{j=1}^{d} u_{\bar{y}_j}\bar{y}_j \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}^2} + 2ru_{\bar{s}} \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}} d\bar{y}d\bar{s},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} \sum_{j=1}^{d} u_{y_j}y_j \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dyds \\
&= A + B
\end{aligned}$$

Ahora introducimos la función

$$\psi(s,y) := -\frac{d}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + d\log r, \quad (s,y) \in E(r).$$

Claramente en la frontera de $E(r)$, $\Phi(-s,y) = r^{-d}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi &:= -\frac{d}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} - \log r^{-d} \\
&= -\frac{d}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} - \log \Phi(-s,y)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{d}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} - \left[-\frac{d}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s}\log e\right]$$

es decir $\psi(s,y) = 0$ en $\partial E(r)$. Además

$$\psi_{y_j} = \frac{y_j}{2s},$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{j=1}^{d} y_j \psi_{y_i} dyds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4 \sum_{j=1}^{d} (u_s y_j) \psi_{y_i} dyds \end{aligned}$$

Integrando por partes con respecto a y, y visto que $\psi = 0$ en $\partial E(r)$, se tiene

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_j} (u_s y_j) \psi_{y_j} dyds \\ &= -\frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4du_s\psi + 4\sum_{j=1}^{d} u_{sy_j} y_j \psi dyds. \end{aligned}$$

Ahora, visto que

$$\psi_s = -\frac{d}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}$$

usamos el teorema de *Fubini-Tonelli* (ver Teorema A.0.10) e integramos por partes con respecto a s en el segundo sumando del miembro derecho, nuevamente usando el hecho de que $\psi(s,y) = 0$ en $\partial E(r)$, sigue

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} (-4du_s\psi) + 4\sum_{j=1}^{d} u_{y_j} y_j \left(-\frac{d}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right) dyds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} (-4du_s\psi) - \frac{2d}{s} \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} y_j dyds - A. \end{aligned}$$

Consecuentemente, visto que u resuelve la ecuación del calor, se tiene

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= A + B \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} (-4d\Delta u\psi) - \frac{2d}{s} \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} y_j dyds \end{aligned}$$

integrando por partes la primera expresión del miembro derecho con respecto a y, se tiene

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4d \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} \psi_{y_j} - \frac{2d}{s} \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} y_j dyds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4d \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} \frac{y_j}{2s} - \frac{2d}{s} \sum_{j=1}^{d} u_{y_j} y_j dyds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} \sum_{j=1}^{d} \left(2du_{y_j} \frac{y_j}{s} - \frac{2d}{s} u_{y_j} y_j \right) dyds = 0.$$

Por tanto $\phi(r)$ es constante, y para calcular su valor tomamos

$$\lim_{r \to 0^+} \phi(r) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^d} \iint_{E(r)} u(s,y) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$
$$= \lim_{r \to 0^+} \iint_{E(1)} u(r^2 s, ry) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$
$$= u(0,0) \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

Por tanto, el teorema quedará demostrado si comprobamos que

$$I := \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = 4.$$

Esta última identidad la probamos separadamente en el siguiente lema.

□

Lema 3.2.8.

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = 4$$

Demostración. Recordar que $E(1) = E(0,0;1)$. Teniendo en cuenta los cálculos que preceden (3.2.5), podemos parametrizar el conjunto $E(1)$ como

$$-\frac{1}{4\pi} \leq s \leq 0, \quad |y| \leq \sqrt{2ds \log(-4\pi s)}.$$

Para s fijo, denotamos $D_s = \left\{ y : |y| \leq \sqrt{2ds \log(-4\pi s)} \right\}$, y calculamos

$$I = \int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} \int_{D_s} |y|^2 dyds.$$

Pasando a las coordenadas polares $y = \rho w$, $w \in S^{d-1}$, se tiene

$$I = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} \int_{0}^{\sqrt{2ds \log(-4\pi s)}} \int_{S_{d-1}} |\rho w|^2 \rho^{d-1} \, dw \, d\rho \, ds$$
$$= |S_{d-1}| \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} \int_{0}^{\sqrt{2ds \log(-4\pi s)}} \rho^2 \rho^{d-1} d\rho ds$$
$$= \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} (\sqrt{2ds \log(-4\pi s)})^{d+2} ds$$
$$= (2d)^{\frac{d+2}{2}} \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} (-s)^{\frac{d+2}{2}} (-\log(-4\pi s))^{\frac{d+2}{2}} ds$$
$$= (2d)^{\frac{d+2}{2}} \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} (-s)^{\frac{d}{2}-1} (-\log(-4\pi s))^{\frac{d+2}{2}} ds.$$

Tomando $\log(-4\pi s) = -z$

$$
\begin{aligned}
I &= (2d)^{\frac{d+2}{2}} \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-z}}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}-1} z^{\frac{d+2}{2}} \frac{e^{-z}}{4\pi}\, dz \\
&= (2d)^{\frac{d+2}{2}} \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} (e^{-z})^{\frac{d}{2}} z^{\frac{d+2}{2}}\, dz \\
&= (2d)^{\frac{d+2}{2}} \frac{|S_{d-1}|}{d+2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} e^{-z\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}+1} dz
\end{aligned}
$$

Llamando c_d a la constante que precede a la integral, y cambiando variables $z = \frac{2}{d}u$

$$
\begin{aligned}
I &= c_d \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{d}{2}+2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{d}{2}+1} du \\
&= c_d \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{d}{2}+2} \Gamma(\frac{d}{2}+2)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la función *gamma* de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Si ahora usamos la propiedad $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, y la fórmula para la medida de la esfera unitaria

$$|S_{d-1}| = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)},$$

entonces el cálculo anterior nos lleva a

$$I = \frac{(2d)^{\frac{d+2}{2}}}{(d+2)(4\pi)^{d/2}} \times \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \times \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{d}{2}+2} \Big(\frac{d}{2}+1\Big)\Gamma(\frac{d}{2}+1) = 4.$$

□

3. Principio del máximo

Una consecuencia de la propriedad del valor medio es el principio del máximo, que después usaremos para probar la unicidad en dominios acotados. Para demostrar el teorema abajo, seguimos la demostración de [**1**, Teorema 4, pág 55].

Teorema 3.3.1 (Principio del máximo fuerte para la ecuación del calor). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio conexo y $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ solución de la ecuación del calor en $D_T = \Omega \times (0,T)$. Si existe $(t_0, x_0) \in D_T$ tal que*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{D}_T} u(t,x)$$

entonces $u(t,x) \equiv u(t_0,x_0)$, $\forall\ (t,x) \in D_{t_0}$.

Demostración. 1. Supongamos que u alcanza su máximo en $(t_0, x_0) \in D_T$, llamamos

$$u(t_0, x_0) = M := \max_{\overline{D}_T} u.$$

Sea $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $E(t_0, x_0; r) \subset D_T$. Por la propiedad del valor medio podemos escribir

$$\begin{aligned} M &= u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^d} \iint_{E(t_0,x_0;r)} u(s,y) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds \\ &\leq \frac{1}{4r^d} \iint_{E(t_0,x_0;r)} M \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds = M \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

donde hemos utilizado en la desigualdad que $u(s, y) \leq M$, y en la última igualdad el Lema 3.2.8 que nos da

$$\frac{1}{r^d} \iint_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds = \frac{1}{r^d} \iint_{E(r)} \frac{|z|^2}{p^2} dzdp = 4$$

siendo $x_0 - y = z, \quad t_0 - s = p$. Por tanto, en (3.3.2) tenemos una igualdad, que podemos escribir como

$$\frac{1}{4r^d} \iint_{E(t_0,x_0;r)} \big(M - u(s, y)\big) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds = 0.$$

Como el integrando es no-negativo, esto solo es posible si se tiene

$$u(s, y) \equiv M, \quad \forall\, (s, y) \in E(t_0, x_0; r).$$

Hemos probado que u es constante en cada conjunto $E(t_0, x_0; r) \subset D_T$. Veamos cómo deducir de aquí que u es constante en todo D_{t_0}.

Sea $(s_0, y_0) \in D_{t_0}$, es decir $y_0 \in \Omega$ y $s_0 \in (0, t_0)$, y supongamos que el segmento rectilíneo R que empieza en el punto (t_0, x_0) y termina en el punto (s_0, y_0), cumple que $R \subset \overline{D}_{t_0}$. Consideremos

$$r_0 := \text{mín} \Big\{ s \in [s_0, t_0] \mid u(t, x) = M,\ \forall\, (t, x) \in R \text{ tal que } t \in [s, t_0] \Big\}.$$

Supongamos que $r_0 > s_0$. Entonces tendríamos $u(r_0, z_0) = M$ para algún z_0 tal que $(r_0, z_0) \in R \cap D_{t_0}$ y por lo tanto tendríamos $u \equiv M$ en $E(r_0, z_0; r)$, para $r > 0$ suficientemente pequeño, por la primera parte de la demostración. Además como $r_0 > s_0$, ciertamente $E(r_0, z_0; r)$ contiene $R \cap \{r_0 - \varepsilon \leq t \leq r_0\}$ para algún $\varepsilon > 0$. Esto quiere decir que r_0 no es el mínimo, o sea es una contradicción. Por lo tanto se concluye que $r_0 = s_0$, es decir $u \equiv M$ en todo el segmento de recta R.

2. Si Ω fuera un dominio convexo (por ejemplo, una "bola") la demostración estaría concluida, pues D_{t_0} también seria convexo. Pero en el caso general no siempre es posible conectar (t_0, x_0) con otro punto de D_{t_0} con un segmento rectilíneo. Pero como Ω es conexo, fijado $x \in \Omega$, siempre existe un número finito de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_m$ en Ω, con cada segmento $[x_{i-1}, x_i] \subset \Omega$, $i = 1, \cdots m$, y de modo que $x_m = x$. Así, para para cada $t \in (0, t_0)$ fijo, podemos tomar tiempos $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$, tales que la línea poligonal formada por los segmentos $[(t_{i-1}, x_{i-1}), (t_i, x_i)]$ esté contenida en $\overline{D}_{t_0}$. En conformidad con el paso 1, $u \equiv M$ en todos estos segmentos de recta, y por tanto $u(t, x) = M, \forall (t, x) \in \overline{D}_{t_0}$.

□

Veamos que el principio del máximo fuerte implica que u siempre alcanza su máximo en la frontera parabólica.

Corolario 3.3.3 (Principio del máximo débil para la ecuación del calor). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ conexo y acotado, y sea $D_T = (0,T) \times \Omega$. Si $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ es tal que*

$$u_t = \Delta u \quad en \quad D_T = (0,T) \times \Omega,$$

entonces, para cada $t \in (0,T)$ se tiene

$$\max_{\overline{D}_t} u = \max_{\Gamma_t} u.$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que para $t \in (0,T)$ fijo se tiene

$$M := \max_{\overline{D}_t} u > \max_{\Gamma_t} u. \tag{3.3.4}$$

Entonces existe $(t_0, x_0) \in \overline{D}_t \setminus \Gamma_t$ tal que $M = u(t_0, x_0)$. Por la definición de la frontera parabólica en (3.2.2), necesariamente $x_0 \in \Omega$ y $t_0 > 0$, es decir $(t_0, x_0) \in D_T$. Podemos pues aplicar el Principio del Máximo Fuerte y deducir que $u \equiv M$ en $\overline{D}_{t_0}$. Pero esto implica que $u \equiv M$ también en Γ_{t_0}, lo que contradice (3.3.4). □

Ahora veamos algunas importantes aplicaciones del principio del máximo.

4. Unicidad en dominios acotados

Comenzamos con la ecuación homogenea.

Corolario 3.4.1. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ y sea $D_T = (0,T) \times \Omega$. Si $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C([0,T) \times \overline{\Omega})$ es solución del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (t,x) \in D_T \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \Gamma_T \\ u(0,x) = 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.4.2}$$

entonces, $u \equiv 0$ en D_T.

Demostración. Basta probar que $u \equiv 0$ en D_t para cada $t \in (0,T)$. Como $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_t) \cap C\overline{D}_t)$ y cumple (3.4.2), por el principio del máximo débil se tiene

$$\max_{\overline{D}_t} u = \max_{\Gamma_t} u = 0$$

Por tanto, $u \leq 0$ en D_t. Aplicando el mismo razonamiento a $-u$, se concluye que también $-u \leq 0$ en D_t, y por tanto que $u \equiv 0$ en D_t. □

A continuación deducimos la unicidad en el caso no homogeneo.

Teorema 3.4.3 (Unicidad en dominios acotados). *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ y sea $D_T = (0,T) \times \Omega$. Si $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(D_T)$, entonces existe a lo sumo una solución $u \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C([0,T) \times \Omega)$ para la EDP*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & en \quad D_T \\ u(0,x) = g(x) & en \quad \Gamma_T \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Demostración. Sea u^1 y u^2 dos soluciones de (3.4.4). Definimos $u = u^1 - u^2$ y observamos que cumple las condiciones del Corolario (3.4.1). Concluimos que $u \equiv 0$ en D_T, y por tanto

$$u^1 = u^2, \quad \text{en } D_T.$$

$\square$

5. Unicidad en $\mathbb{R}^d$. El caso homogéneo

El teorema 3.1.8 nos dice que el problema de *Cauchy* para la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ tiene siempre más de una solución. No obstante, vamos a demostrar que si nos restringimos a ciertas clases de funciones entonces se puede tener unicidad. En primer lugar veamos que esto ocurre para la clase de soluciones acotadas del problema homogeneo (2.1.14).

Obsérvese que no es posible aplicar directamente el principio del máximo, dado que el dominio $\Omega = \mathbb{R}^d$ no es acotado, y por tanto en la "*frontera lateral*" no hay condiciones. Así, para solventar esta dificultad haremos un proceso de comparación con ciertas soluciones explícitas de la ecuación del calor. Es fácil verificar que los polinomios

$$w_\alpha(t,x) = \alpha(2t + \frac{|x|^2}{d}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

son soluciones de la ecuación del calor en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. En efecto,

$$\partial_t[w_\alpha(t,x)] = 2\alpha$$

$$\Delta w_\alpha(t,x) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j x_j}(\alpha x_j^2) = \frac{2\alpha d}{d} = 2\alpha$$

de donde sigue que $w_t = \Delta w$.

Para demostrar el teorema abajo, seguimos la demostración de [**5**, Teorema 6.2.3, pág 302].

Teorema 3.5.1 (Unicidad para el problema de Cauchy homogéneo). *Sea $g \in C(\mathbb{R}^d)$ y acotada. Entonces existe a lo sumo una solución acotada $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ del problema*

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Demostración. Sean u^1 y u^2 dos soluciones de (P) tales que $|u^1| \le M_1$ y $|u^2| \le M_2$. Llamamos

$$M = \max\{M_1, M_2\}.$$

Definimos la función $v(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$, de modo que $v \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$, v es acotada y

$$\begin{cases} v_t(t,x) - \Delta v(t,x) = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ v(0,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Esto último sigue de

$$v_t - \Delta v = (u_t^1 - \Delta u^1) - (u_t^2 - \Delta u^2) = 0$$

$$v(0,x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Queremos aplicar el principio del máximo a $v(t,x)$, pero directamente no es posible en todo el dominio $\mathbb{R}^d$. Para soslayar esta dificultad, para cada $r \geq 1$, consideremos la bola $B_r = \{|x| < r\}$ y la función

$$w_r(t,x) = \frac{2dM}{r^2}\left(2t + \frac{|x|^2}{d}\right),$$

que como hemos visto es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, y en particular en $(0,\infty) \times B_r$.

Para cada $T > 0$ fijo, llamamos $C_r = (0,T) \times B_r$. Aplicando el principio del máximo débil a la función

$$u(t,x) = v(t,x) - w_r(t,x), \quad \text{en } C_r,$$

obtenemos que

$$\max_{\overline{C}_r} u(t,x) = \max_{\Gamma_r} u(t,x), \tag{3.5.2}$$

donde $\Gamma_r = (\{0\} \times B_r) \cup ([0,T] \times \partial B_r)$. Llamamos $\Gamma_r^1 = (\{0\} \times B_r)$ y $\Gamma_r^2 = ([0,T] \times \partial B_r)$. En Γ_r^1 tenemos

$$w_r(0,x) = \frac{2M|x|^2}{r^2} \geq |v(0,x)| = 0$$

y por tanto $u(0,x) \leq 0$. En Γ_r^2, si $|y| = r$

$$w_r(t,y) = \frac{2dM}{r^2}(2t + \frac{r^2}{d}) = \frac{4dMt}{r^2} + 2M \geq 2M = 2\max\{M_1, M_2\} \geq |v(t,y)|$$

ya que $|v| \leq |u^1| + |u^2|$. Por tanto también se tiene $u(t,y) \leq 0$, $|y| = r$, $t \geq 0$. Así, (3.5.2) implica

$$u(t,x) \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, x \in B_r,$$

que es lo mismo que

$$v(t,x) \leq w_r(t,x), \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, x \in B_r, \tag{3.5.3}$$

Exactamente el mismo argumento, aplicado a la función

$$\tilde{u}(t,x) = -v(t,x) - w_r(t,x), \quad \text{en } C_r,$$

implica que $\tilde{u} \leq 0$ en Γ_r y por tanto que

$$\tilde{u}(t,x) \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, x \in B_r,$$

o lo que es lo mismo

$$v(t,x) \geq -w_r(t,x), \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, x \in B_r. \tag{3.5.4}$$

Combinando ambas expresiones, (3.5.3) y (3.5.4), y haciendo $T \to \infty$, obtenemos

$$|v(t,x)| \leq w_r(t,x), \quad \forall\, t \in [0,\infty), \quad \forall\, x \in B_r.$$

Fijando $x \in \mathbb{R}^d$, la desigualdad anterior es válida para todo $r > |x|$, por tanto haciendo $r \to \infty$ se obtiene

$$|v(t,x)| \leq \lim_{r\to\infty} w_r(t,x) = 0,$$

es decir, $v(t,x) = 0$, y como consecuencia

$$u^1(t,x) = u^2(t,x).$$

$\square$

Combinando el teorema anterior con el Teorema 2.1.16 obtenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Corolario 3.5.5. *La única solución acotada del problema de Cauchy (P) del Teorema 3.5.1 viene dada por*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

6. Unicidad en $\mathbb{R}^d$ con crecimiento gaussiano

A continuación demostramos un resultado de unicidad más general que el Teorema 3.5.1, donde las soluciones no son necesariamente acotadas, pero tienen a lo sumo una cota superior gaussiana. Comenzamos con un principio del máximo adaptado a esta situación. Para demostrar el teorema abajo, seguimos la demostración de [**1**, Teorema 5, pág 57].

Teorema 3.6.1 (Principio del máximo para el problema de Cauchy). *Sea $g \in C(\mathbb{R}^d)$, y sea $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,T)\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T)\times\mathbb{R}^d)$ una solución del problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.6.2}$$

que además satisface la estimación

$$u(t,x) \le Ae^{a|x|^2} \quad (0 \le t < T, x \in \mathbb{R}^d) \tag{3.6.3}$$

siendo $A, a > 0$ constantes. Entonces

$$\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x).$$

Demostración. Obsérvese que la cota inferior es trivial, ya que

$$\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(t,x) \ge \sup_{\mathbb{R}^d} u(0,x) = \sup_{\mathbb{R}^d} g(x).$$

El objetivo es probar la cota superior.

1. Primeramente asumimos que

$$4aT < 1 \tag{3.6.4}$$

Para algún $\varepsilon > 0$ se tiene

$$4a(T+\varepsilon) < 1 \tag{3.6.5}$$

Fijando $y \in \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ y definiendo

$$v(t,x) := u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \qquad (t > 0, x \in \mathbb{R}^d),$$

vemos que

$$v_{x_j} = u_{x_j} - \frac{\mu(x_j - y_j)}{2(T+\varepsilon-t)^{\frac{d+2}{2}}} e^{\frac{|x_j-y_j|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$v_{x_jx_j} = u_{x_jx_j} - \left[\frac{\mu}{2(T+\varepsilon-t)^{\frac{d+2}{2}}} + \frac{\mu(x_j-y_j)^2}{4(T+\varepsilon-t)^{\frac{d+4}{2}}}\right] e^{\frac{|x_j-y_j|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\Delta v = \Delta u - \left[\frac{\mu d}{2(T+\varepsilon-t)^{\frac{d+2}{2}}} + \frac{\mu|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)^{\frac{d+4}{2}}}\right] e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} = v_t$$

y por lo tanto

$$v_t = \Delta v \quad \text{en } (0,T)\times\mathbb{R}^d.$$

Sea $r > 0$ fijo, tomando $\Omega := B(y,r)$, $D_s = (0,s)\times B(y,r)$, y aplicando el principio del máximo a v, se obtiene

$$\max_{\overline{D}_s} v = \max_{\Gamma_s} v, \quad \forall\, s\in(0,T), \tag{3.6.6}$$

donde $\Gamma_s = (\{0\}\times\Omega)\cup([0,s]\times\partial\Omega)$. Llamamos $\Gamma_s^1 = (\{0\}\times\Omega)$ y $\Gamma_s^2 = ([0,s]\times\partial\Omega)$. En Γ_s^1 tenemos

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{d/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \le u(0,x) = g(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{3.6.7}$$

En Γ_s^2, consideramos $|x-y| = r$ y $0\le t\le s<T$, y sigue que

$$\begin{aligned} v(t,x) &:= u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\le Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}, \quad \text{por hipótesis} \\ &\le Ae^{a(r+|y|)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{d/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

visto que los denominadores son menores y que $|x|\le|x-y|+|y|$. De (3.6.5) sigue que

$$a < \tfrac{1}{4(T+\varepsilon)} \implies \exists\,\gamma>0 \text{ tal que } a+\gamma = \tfrac{1}{4(T+\varepsilon)}.$$

En particular, sustituyendo en la expresión anterior tenemos

$$v(t,x) \le Ae^{a(r+|y|)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{d/2}e^{(a+\gamma)r^2}.$$

Como para r grande, $(a+\gamma)r^2$ crece más rápidamente que $a(r+|y|)^2$, podemos escoger un $r_0 = r_0(y,\gamma,\mu,a,A)$ suficientemente grande de modo que

$$v(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^d} g, \quad \forall\, t\in[0,T],\ |x-y| = r,\ r\ge r_0. \tag{3.6.8}$$

Por tanto de (3.6.6), (3.6.7) y (3.6.8) se obtiene

$$v(t,y) = u(t,y) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} \le \sup_{\mathbb{R}^d} g$$

para todo $t\in[0,s]$, y para todo $s<T$, $y\in\mathbb{R}^d$ y $\mu>0$. Haciendo $s\to T^-$ y $\mu\to 0^+$, resulta

$$\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(t,y) \le \sup_{\mathbb{R}^d} g.$$

3. Si (3.6.4) no fuera valido, repetimos la demostración anterior en los intervalos de tiempos $[0,T_1]$, $[T_1,2T_1]$, etc., para $T_1 = \frac{1}{8a}$.

□

Concluimos la sección con un teorema de unicidad.

Teorema 3.6.9 (Unicidad para el problema de Cauchy no homogéneo). *Sean $g \in C(\mathbb{R}^d)$ y $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Entonces, existe a lo sumo una solución $u \in C^{1,2}_{t,x}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ para el problema*

$$
\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & 0 < t < \infty,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.6.10}
$$

satisfaciendo la estimación

$$
|u(t,x)| \leq A e^{a|x|^2} \quad (0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^d) \tag{3.6.11}
$$

siendo $A, a > 0$ constantes.

Demostración. Si u^1 y u^2 son dos soluciones satisfaciendo (3.6.10) y (3.6.11), entonces $w = u^1 - u^2$ y $\tilde{w} = u^2 - u^1$ cumplen ambas las condiciones del Teorema 3.6.1, para cada $T < \infty$, y con dato inicial

$$
w(0,x) = 0 = \tilde{w}(0,x)
$$

Por tanto

$$
\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} w(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\{0\} = 0
$$

de donde sigue que $w \leq 0$ en $(0,T) \times \mathbb{R}^d$, para todo $T > 0$. De igual modo se obtiene que $\tilde{w} \leq 0$, y por tanto concluimos

$$
u^1 = u^2, \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^d.
$$

$\square$

Apéndice A

Resultados Auxiliares

En el Apéndice recogemos algunos conceptos y teoremas auxiliares, que se han visto y demostrado en los cursos de grado. Damos también una referencia donde se pueden consultar los detalles.

Definición A.0.1. *Un dominio acotado $D \in \mathbb{R}^d$ se dice que es regular si para cada $x_0 \in \partial D$ existe un entorno U de x_0 en $\mathbb{R}^d$ y una función*

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

continuamente diferenciable, de forma que

1. $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad si \quad x \in U,$
2. $\partial D \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\},$
3. $D \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}.$

En ese caso se llama vector normal exterior en el punto $x_0 \in \partial D$ a

$$\vec{n}(x_0) = \nabla\varphi(x_0)/|\nabla\varphi(x_0)|.$$

Se puede probar que $\vec{n}$ es un campo de vectores continuo en ∂D, e independiente de la elección de φ.

Ver [**5**] definición 1.2.1, página 28.

Teorema A.0.2 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Sea D un dominio regular y $\vec{F} \in C^1(\bar{D})$ un campo de vectores. Entonces*

$$\int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área en ∂D.

Ver [**5**] teorema 1.2.3, página 30.

El siguiente resultado se ve en los primeros cursos de cálculo. La primera parte se denomina criterio M de Weierstrass.

Teorema A.0.3 (Teorema de derivación de series de funciones). *Sea una sucesión de funciones continuas $f_n : (a, b) \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, ...$*

(i) Si $\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)| \leq M_n$ y se cumple $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$, entonces la serie

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in (a, b),$$

converge uniforme y absolutamente en todo $x \in (a, b)$, y $f \in C(a, b)$

(ii) Si además f_n son derivables en (a, b) y se verifica que

$$\sup_{x\in(a,b)} |f_n'(x)| \leq M_n', \quad donde \quad \sum_{n\geq 1} M_n' < \infty,$$

entonces la serie $f(x)$ es derivable en (a,b) y se tiene

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (a,b),$$

con convergencia uniforme y absoluta en todo $x \in (a,b)$.

Teorema A.0.4 (Teorema de la convergencia uniforme de series de Fourier). *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ una función 2π-periódica y de clase $C^1(\mathbb{R})$. Entonces, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ absoluta y uniformemente en todo $x \in [-\pi,\pi]$.*

Este resultado se ha visto en el curso [**3**]. Ver también [**5**], teorema 3.3.6, pág 163.

Teorema A.0.5. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^1 tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n| < \infty$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente en casi todo punto x a una función de L^1, y además se verifica*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_j(x)\Big)\, dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int f_j(x)\, dx.$$

Ver [**2**] teorema 2.25, página 55.

Teorema A.0.6. **Lema de derivación de integrales paramétricas.** *Sea $f : X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $(-\infty < a < b < \infty)$, tal que para cada $t \in [a,b]$ la función $f(\cdot,t) : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable. Definimos*

$$F(t) = \int_X f(x,t)dx, \quad t \in (a,b).$$

Entonces

1. *Si existe un $g \in L^1(X)$ tal que $|f(t,x)| \leq g(x)$ para todo x, t, y si $\lim_{t\to t_0} f(t,x) = f(t_0,x)$, $\forall x$, entonces*
$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$
En particular, si $f(x,\cdot)$ es continua para todo $x \in X$, entonces F es continua.
2. *Si existe $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ para todo x,t, y además existe una función $g \in L^1$ tal que*
$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x), \quad \text{para todo } x \in X, t \in (a,b),$$
entonces F es diferenciable en (a,b) y se verifica
$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx, \quad t \in (a,b).$$

Ver [**2**] teorema 2.27, página 56.

Definición A.0.7. *Sea γ una curva en $\mathbb{C}$, parametrizada por $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1, y sea f una función continua en γ. Definimos la integral de f a lo largo de γ por:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Ver [**6**] capítulo 1, sección 3.

Teorema A.0.8 (Teorema de Cauchy). *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Entonces, para toda curva cerrada γ se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Ver [**6**], cap 2, teorema 2.2, pág 39.

Corolario A.0.9. *Si f es una función holomorfa en un abierto Ω, entonces f tiene infinitas derivadas complejas en Ω. Además si C es un circulo cuyo interior está contenido en Ω, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\theta)}{(\theta - z)^{n+1}} d\theta$$

para todo $z \in \operatorname{Int} C$.

Ver [**6**] Corolario 4.2, página 47.

Teorema A.0.10. *(Fubini-Tonelli)*
(i) (Tonelli) Sea $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ medible y **no-negativa***, entonces las funciones*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d; \quad h(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

son medibles, y además se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right] dx. \tag{A.0.11}$$

(ii) (Fubini) Sea $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ medible tal que alguna de las integrales que sigue es finita

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x, y)| dx \right] dy < \infty \quad \text{ó} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right] dx < \infty.$$

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ y se cumple (A.0.11).

Ver [**2**] Theorem 2.37, página 67.

Bibliografía

[1] EVANS, Lawrence: *Partial Differential Equations*, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010.

[2] FOLLAND, Gerald: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, John Wiley and Sons, 1999.

[3] GARRIGÓS, Gustavo: *Apuntes de Equaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier*, Universidad de Murcia, curso 2020

[4] KATZNELSON, Yitzhak: *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd corrected edition, Stanford, 2002.

[5] PERAL ALONSO, Ireneo: *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison-Wesley, 1993.

[6] STEIN, Elias; SHAKARCHI, Rami: *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2007.