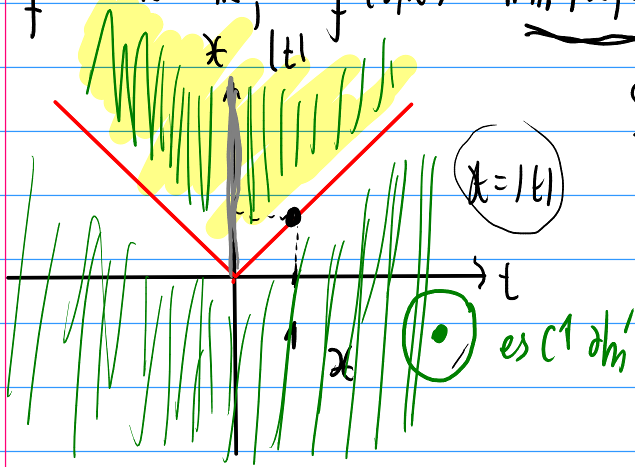
Ejercicio 3

Considerar la ecuación diferencial con valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{mín}\{x, |t|\} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *existe una única solución maximal definida en todo* $\mathbb{R}$.

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t,x) = \underline{\min\{x,|t|\}}$ es continua.



Si $\underline{x \geq |t|} \Rightarrow f(t,x) = |t|$

Si no $f(t,x) = x$

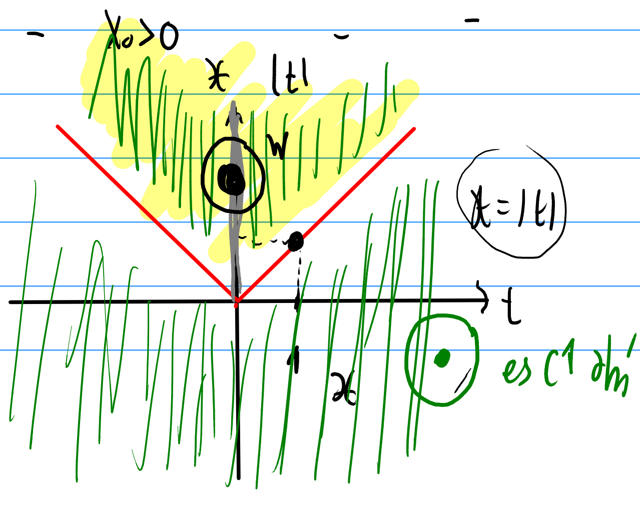
¿Es localmente Lipschitz respecto a x?

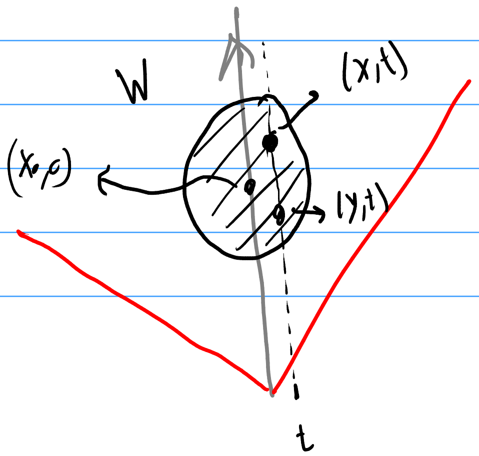
- El conjunto $U = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 :$ "$\underline{x \neq |t|}$", "$x \geq |t| \Rightarrow t \neq 0$" $\}$

No sey lo logo

es abierto y ahí f es C^1 ⇒ es loc Lipschitz respecto a x en U

- Sea $(x_0, 0)$ ∃ un entorno W como el de la figura, tomo $(x,t),(y,t) \in W$

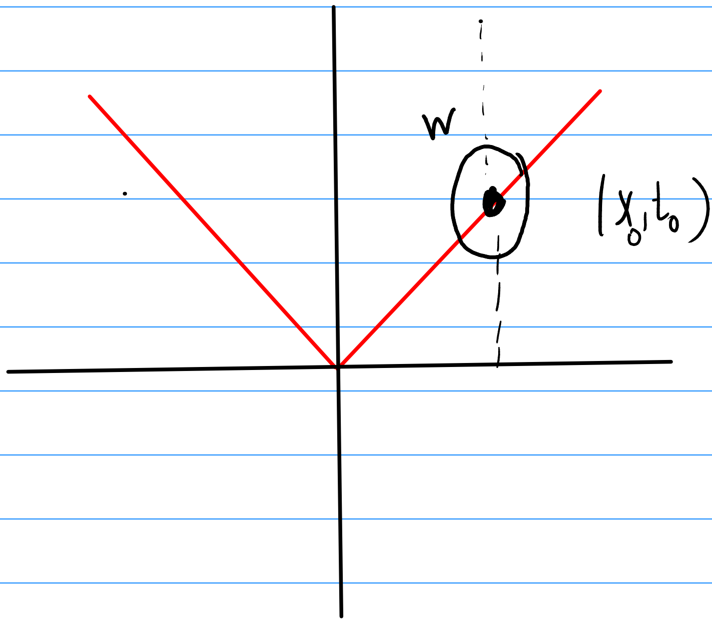


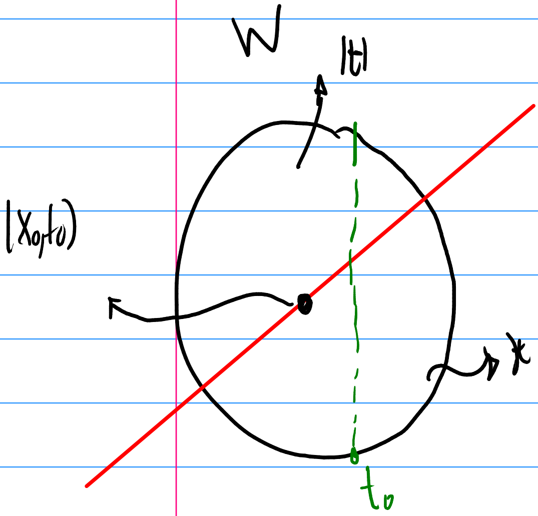


$$\|\underbrace{f(t,x)}_{|t|} - \underbrace{f(t,y)}_{|t|}\| = \|\,|t| - |t|\,\| = \|0\| < K\cdot\|x-y\|$$

(Tomo $K=1$ por ejemplo)

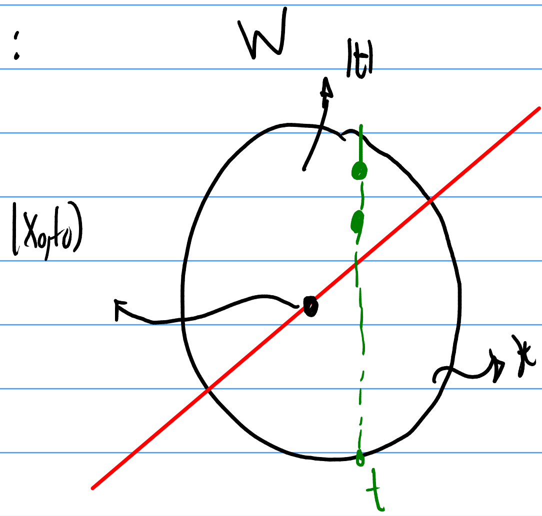
- Si (x_0,t_0) cae en la raya:





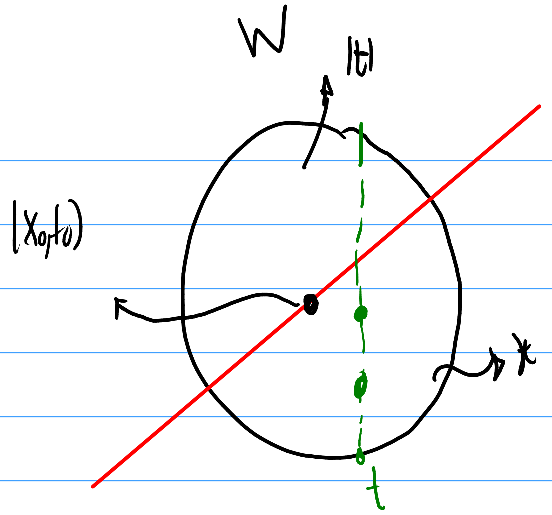
Tomo $(t,x),(t,y) \in W$

Caso 1:



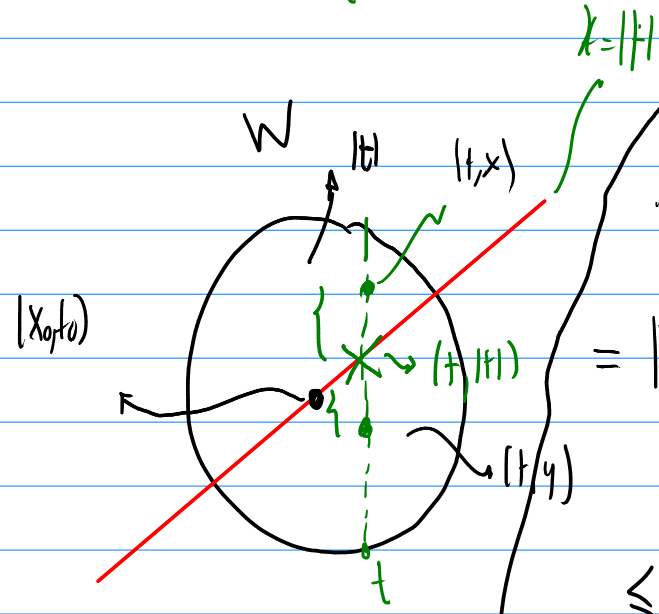
$$\Rightarrow \|f(t,x)-f(t,y)\| = \|\,|t|-|t|\,\| = 0 \checkmark$$

Caso 2:



$$\|\overset{x}{f(t,x)} - \overset{y}{f(t,y)}\| = \|x-y\| < \overset{K}{2}\|x-y\|$$

Caso 3:



$$\|f(t,x) - f(t,y)\|$$

$$= \|\underbrace{f(t,x) - f(t,|t|)}_{} + \underbrace{f(t,|t|) - f(t,y)}_{}\|$$

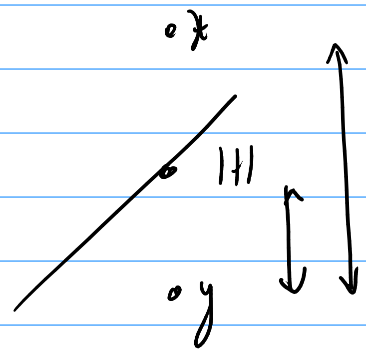
$$\overbrace{\quad}^{0}$$

$$\leq \|f(t,x) - f(t,|t|)\|$$

$$+ \|f(t,|t|) - f(t,y)\|$$

$$< 2 \cdot \| |t| - y\|$$

$$< \|x-y\|$$



Más certo: $\|\underbrace{f(t,x)}_{|t|} - \underbrace{f(t,y)}_{y}\| = \| |t| - y\| < \|x-y\|$

$(K=1)$.

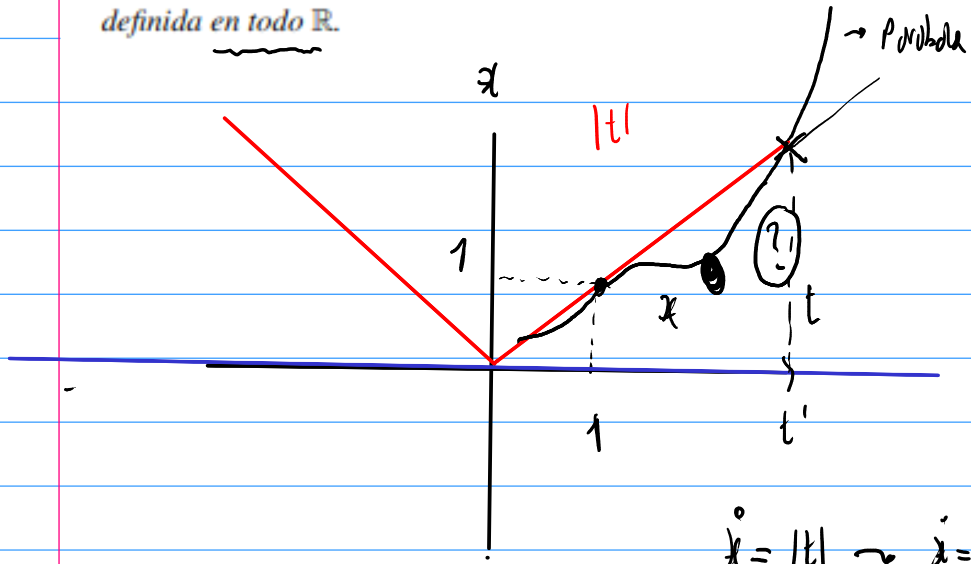
Continua + Loc. Lipschitz en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Las soluciones maximales son únicas.

Ejercicio 3

Considerar la ecuación diferencial con valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \min\{x, |t|\} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *existe una única solución maximal definida en todo* $\mathbb{R}$.

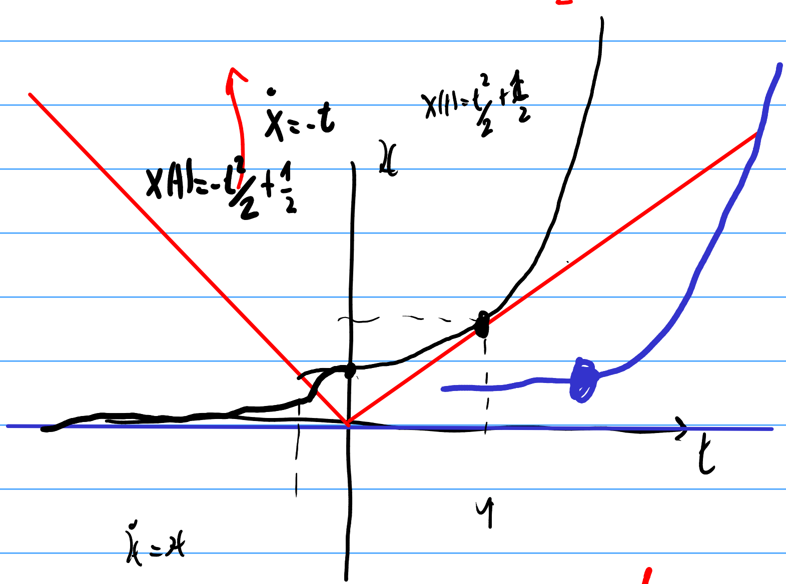


$\dot{x} = \min\{x, |t|\}$

$y(t) = 0\ \forall t$ es solución.

$\dot{x} = |t| \rightsquigarrow \dot{x} = t \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2}$, $\forall t \geq t'$

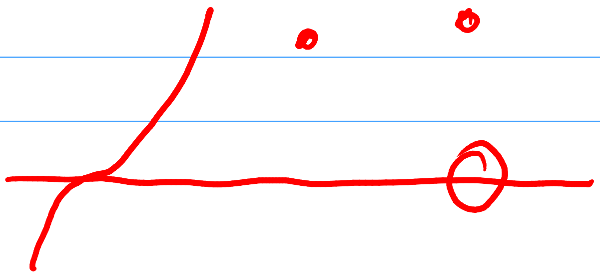
$\dot{x} = -t \rightsquigarrow x(t) = -\frac{t^2}{2} + C$



$x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$, $t \geq 0$

$x(0) = \frac{1}{2}$

$\dot{x} = \sqrt{|x|}$



$x(t) = 0\ \forall t$

Ejercicio 1

Determine si el teorema de Picard garantiza o no la existencia y unicidad de una solución local para los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 2$
2. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 1$
3. $\dot{x} = \frac{t-1}{x}, \quad x(0) = 1$
4. $\dot{x} = f(t,x), \quad x(1) = 0$ con $f : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = \min\left\{\frac{x}{t}, t\right\}$

Problema →

$t = x$

Respuesta:

A) El teorema garantiza solución local única para todas menos 4.

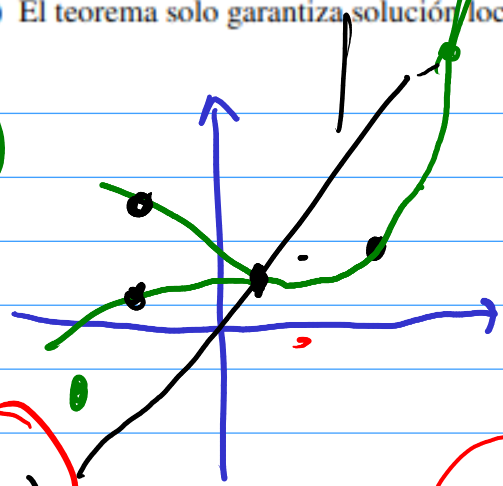
B) El teorema solo garantiza solución local única para 1. y 3.

C) El teorema solo garantiza solución local única para 2. y 3.

D) El teorema garantiza solución local única para todas menos 1.

E) El teorema solo garantiza solución local única para 3.

$\dot{x} = f(t,x)$



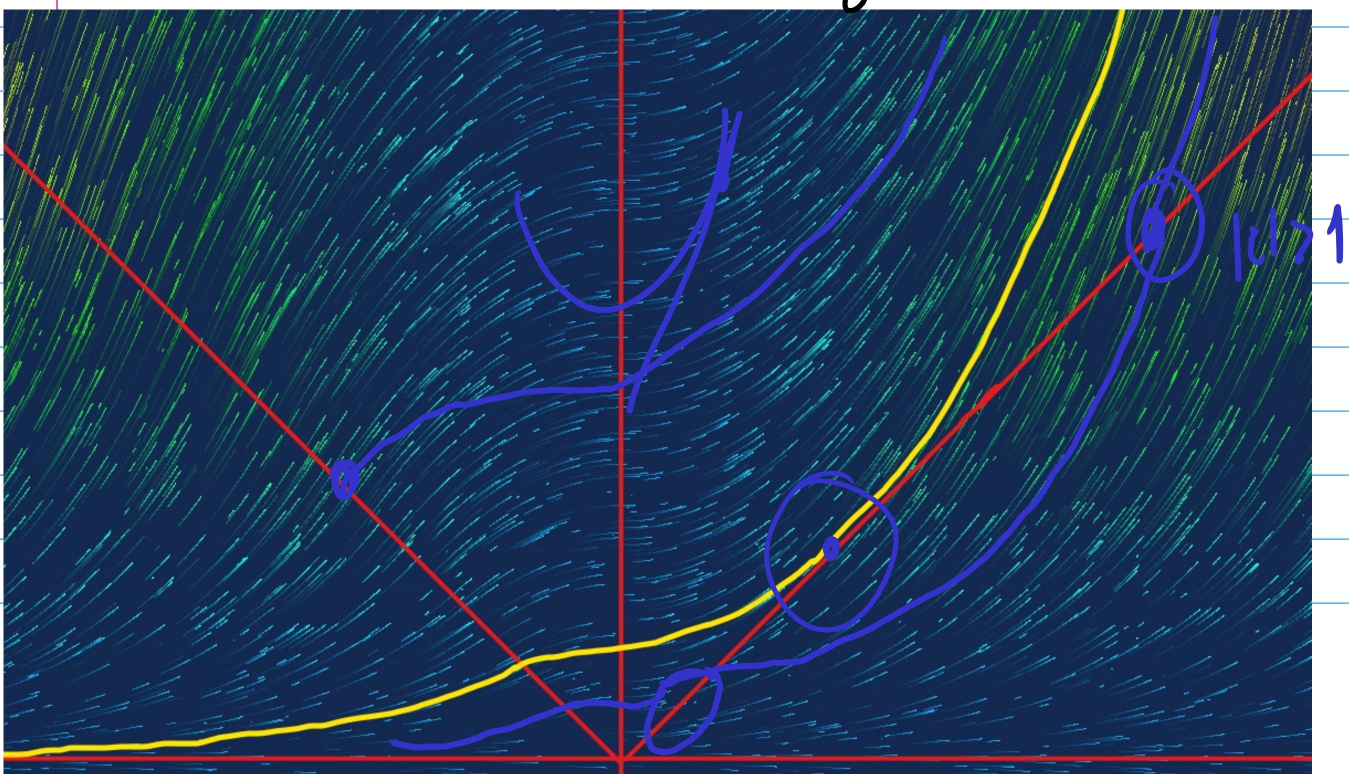
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no cumple hipótesis.

$f(t,x) = \sqrt{|t-x|}.$

$\dot{x} = g(t,x)$

$g : \mathbb{R}^2 - \{t = x\} \to \mathbb{R}$

$g(t,x) = \sqrt{|t-x|}.$

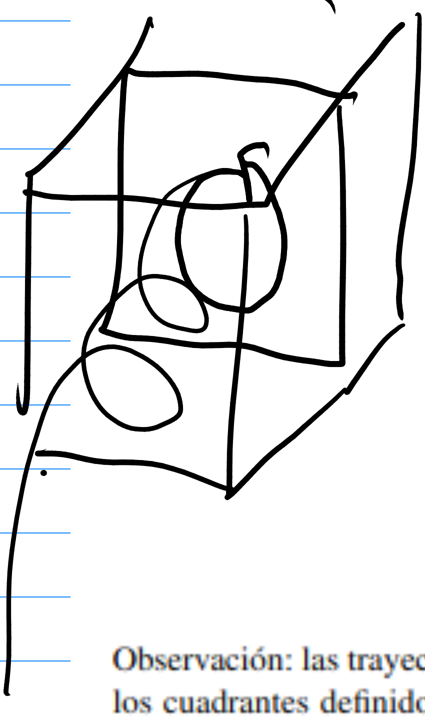


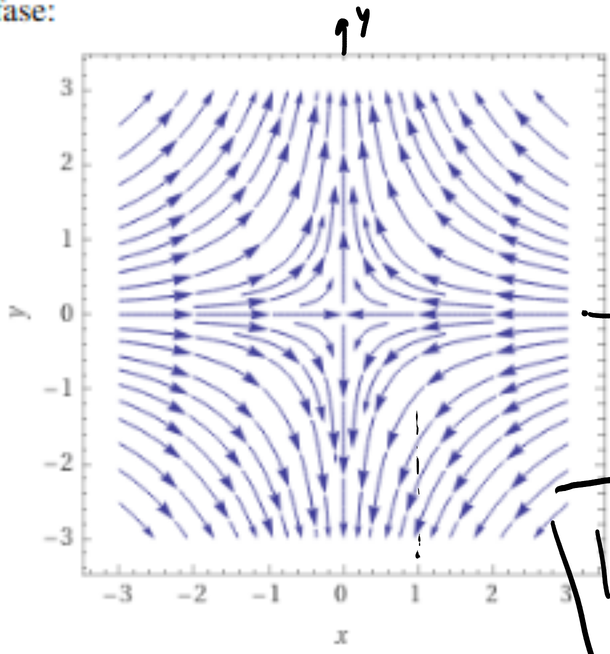
Ejercicio 4 Desarrollo

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$$

con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Supongamos que la ecuación tiene asociado el siguiente diagrama de fase:





$K = \{ (t,x,y) : |x| \leq 2,\ |y| \leq 2,\ |t| \leq n \}$

$|x(t)| \leq 2$
$|y(t)| \leq 2$ $\forall t > 0$

$t > n$.

Observación: las trayectorias cuya condición inicial se encuentra en el interior de alguno de los cuadrantes definidos por los ejes coordenados son asintóticas a dichos ejes. El origen $(0,0)$ es el único punto de equilibrio de la ecuación.

1. Sea (I_1, ϕ_1) la solución maximal tal que $\phi_1(0) = (1,0)$. Probar usando el teorema de *Escape de compactos* que I_1 no está acotado superiormente.
2. Probar que si (I_2, ϕ_2) es solución con $\phi_2(0) = (x_0, y_0)$, siendo $\phi_2(t) = (x(t), y(t))$, entonces (I_2, ϕ_3) con $\phi_3(t) = (x(t), 0)$ y (I_2, ϕ_4) con $\phi_4(t) = (0, y(t))$ son soluciones de la ecuación.
3. Probar que todas las soluciones tienen intervalo maximal $\mathbb{R}$.