Universidad de la República **Ecuaciones Diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL

SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
Versión 1	**C**	**C**	**B**	**C**

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
Versión 2	**B**	**E**	**B**	**C**

I. Múltiple Opción

Versión 1 (la Versión 2 tenía los mismos ejercicios en diferente orden) **Ejercicio 1.**(10 pts.)

Sea f una función 2π-periódica tal que $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$. Indicar cuál de las opciones corresponde a la serie de Fourier de f.

(A) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(2kx)}{k}$

(B) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}$ **(C)**

(C) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$

(D) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$

(E) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^2}$

Solución Calculamos el desarrollo de Fourier, notar que la funcion $|x|$ es par.

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x dx = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi^2}{2} = \pi$
- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx) dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx) dx = \dfrac{2}{\pi}\left(x\dfrac{\sin(kx)}{k}|_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(kx)}{k}dx\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos(kx)}{k^2}|_0^{\pi}\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^k - 1}{k^2}\right).$
- Observar que $a_{2k} = 0$ y que $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{\pi k^2}$

- Observar que como f es par $b_k = 0$.

  Luego $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$

Ejercicio 2.(10 pts.)

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Indique la opción correcta.

(A) $\sup\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = \dfrac{1}{n}$ y $f_n \rightrightarrows 0$

(B) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = +\infty$ y f_n no converge uniformemente.

(C) $f_n \to 0$ pero f_n no converge uniformemente.

(D) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1$ y f_n no converge uniformemente.

(E) f_n no converge puntualmente.

Solución Considere $x \in [0,1]$ calculando el limite cuando $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx} = 0.$$

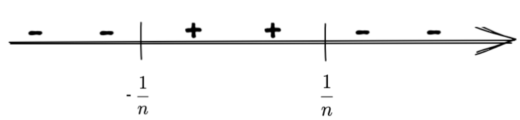
Luego f_n converge puntualmente a 0.

Calculemos $\sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ f_n$ es derivable y

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^2x(nx)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n + n^3x^2 - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

Luego f_n' tiene una raíz en si $1 - n^2x^2 = 0$ en $(0,1)$, o sea $x = \frac{1}{n}$. El signo de f_n':



Así que $\frac{1}{n}$ es un máximo local, además $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

Observemos que $f_n(0) = 0$ y que $f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} < \frac{1}{2}$ para todo $n > 1$.

Así que $\frac{1}{n}$ un maximo absoluto de f_n y $\sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = \dfrac{1}{2}$ para $n > 1$.

Lo anterior implica que f_n no converge uniformemente.

Ejercicio 3.(8 pts.)

Sea $U(t,x)$ la solución de la ecuación del calor. Indicar la opción correcta:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi) \\ u(x,0) = 5\sin(-3x) + \dfrac{7}{2}\sin(8x) \quad \forall x \in (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall t \in (0,+\infty). \end{cases}$$

(A) $U(t,x) = 5\sin(-3x)e^{3t} + \dfrac{7}{2}\sin(8x)e^{-8t}$

(B) $U(t,x) = 5\sin(-3x)e^{-9t} + \dfrac{7}{2}\sin(8x)e^{-64t}$

(C) $U(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 5\frac{\sin(-3kx)e^{-9kt}}{k^2} + \frac{7}{2}\frac{\sin(8kx)e^{-64kt}}{k^2}$

(D) $U(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 5\frac{\sin(-3kx)e^{-3kt}}{k^2} + \frac{7}{2}\frac{(-1)^k\sin(8kx)e^{-8kt}}{k^2}$

(E) $U(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 5\frac{\sin(-3kx)e^{-3kt}}{k} + \frac{7}{2}\frac{\sin(8kx)e^{-8kt}k}{k} + \frac{(-1)^k cos(kx)x}{k}$

Solución

La solución de la ecuacion del calor tiene la forma:

$$U(x,t) = 5\sin(-3x)e^{-(3)^2t} + \frac{7}{2}\sin(8x)e^{-8^2t} = 5\sin(-3x)e^{9t} + \frac{7}{2}\sin(8x)e^{-64t}$$

Ejercicio 4.(10 pts.)

Sea f una función 2π-periódica tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^6 + 5 & x \in (0,\pi) \\ 0 & x = 0 \\ -x^6 - 5 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Considere $S_\infty(f)$ la serie de Fourier de f. Seleccione la opción correcta.

(A) $S_\infty(f)(0) = 5$

(B) $S_\infty(f)$ no está definida en cero.

(C) $S_\infty(f)(0) = 0$

(D) $S_\infty(f)(0) = -5$

(E) $S_\infty(f)(0) = \dfrac{5}{2}$

Solución Tenemos que aplicar el teorema de Dini que define la convergencia de $S_\infty f$.

Observar que 0 es un punto de discontinuidad:

$$f_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 \text{ y } \quad f_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -5.$$

Así que $S_\infty f(0) = \dfrac{f_+(0) + f_-(0)}{2} = 0.$

II. Desarrollo

Ejercicio 1.(14 pts.)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

1. Hallar los puntos críticos.
2. Estudiar la estabilidad alrededor del origen $(0,0,0)$ utilizando una función de Lyapunov de la forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Solución

1.
   - $\dot{x} = 0 \to 2y(z-1) = 0 \to y = 0$ o $z = 1$.
   - $\dot{y} = 0 \to -x(z-1) = 0 \to x = 0$ o $z = 1$.
   - $\dot{z} = 0 \to -z^3 = \to z = 0$.

   Asi que el único punto crítico es el $(0,0,0)$.

2. Para que $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ sea función de Lyapunov se debe cumplir que $(0,0,0)$ sea un mínimo estricto, así que $a,b,c > 0$. Ademas

$$\dot{V} = \nabla V.X = 2ax(2y(z-1)) + 2by(-x(z-1)) + 2cz(-z^3) =$$

$$= 4axyz - 4axy - 2byxz + 2bxy - 2cz^4$$

$$= (4a-2b)xyz + (2b-4a)xy - 2cz^4.$$

Tomando $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$, se tiene que $\dot{V} = -z^4 \leq 0$ si $(x, y) \neq (0, 0, 0)$.

Para demostrar que el $(0, 0, 0)$ no es asintóticamente estable observar que la función $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ es una preintegral. Por lo tanto, las órbitas están contendidas en las curvas de nivel de V, que son cilindros elípticos. Lo que implica que el $(0, 0, 0)$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 2.(14 pts.)

Considere el siguiente problema con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^4 + e^x + 1)sen(3x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Mostrar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución definida en un intervalo que contiene al 0.
2. Probar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ la solución maximal está definida en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia: observar los puntos críticos de la ecuación.

Solución

1. Sea la función $f(t, x) = (x^4 + e^x + 1)sen(3x)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Notar que f tiene ambas derivadas parciales continuas e $\mathbb{R}^2$, lo cual implica que es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo su dominio y consecuentemente f es localmente de Lipschitz en $(0, x_0)$ respecto a x. Usando el teorema de Picard en el punto $(0, x_0)$ podemos deducir que el problema:

   $$\begin{cases} \dot{x} = (x^4 + e^x + 1)sen(3x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

   tiene una única solución $x : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$.

2. Notar que los puntos de la forma $\dfrac{k\pi}{3}$ son puntos criticos de la ecuacion. Dado x_0:

   - O x_0 es de la forma $\dfrac{k\pi}{3}$ y por lo tanto la solución es estacionaria y definida en todo $\mathbb{R}$.

- O existe un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{k_0\pi}{3} < x_0 < \frac{(k_0+1)\pi}{3}$$

En tal caso considero la solución maximal $x : I_{\max} \to \mathbb{R}$.

Observar que necesariamente

$$\frac{k_0\pi}{3} < x(t) < \frac{(k_0+1)\pi}{3}$$

ya que estamos en condiciones de Picard y hay unicicdad de soluciones.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ sea el compacto

$$K = [-N, N] \times \left[\frac{k_0\pi}{3}, \frac{(k_0+1)\pi}{3}\right]$$

Estamos en la hipótesis del teorema de compactos, necesariamente:

  - Existe $t_1 < 0$, $t_1 \in I_{max}$ tal que $(t_1, x(t_1)) \notin K$
  - Existe $t_2 > 0$, $t_2 \in I_{max}$ tal que $(t_2, x(t_2)) \notin K$

Tenemos que

$$\frac{k_0\pi}{3} < x(t_i) < \frac{(k_0+1)\pi}{3} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Por lo que necesariamente $t_1 < -N$ y $t_2 > N$. Como este argumento vale para todo N probamos que la solución está definida en todo $\mathbb{R}$