N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas V/F

Ej. 1A	Ej. 1B	Ej. 1C	Ej. 1D
F	V	F	V

Ej. 2A	Ej. 2B	Ej. 2C	Ej. 2D	Ej. 2E	Ej. 2F	Ej. 2G
F	V	F	V	V	V	F

Respuestas MO

Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8
B	B	D	A	A	B

Importante

- El examen dura 3 horas.
- El examen es de 100 puntos en total y se aprueba con 50 o mas puntos.
- Solo serán válidas las respuestas a los ejercicios dentro del cuadro de respuestas.
- Los puntajes están indicados al comienzo de cada ejercicio. Un ejercicio o parte de un ejercicio sin responder no lleva puntaje (es decir 0 puntos).

Ejercicios de Verdadero/Falso

Ejercicio 1 (Puntajes: 4 cada respuesta correcta; -2 cada respuesta incorrecta)

Considerar la ecuación del calor para $(x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$ con dos condiciones de borde distintas:

$$(1) \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = x + f(x) \end{cases}$$

Se asume existencia y unicidad de soluciones en ambos casos, y que la función f satisface $f(0) = f(1) = 0$ pero no es idénticamente nula.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) Si u es solución de (1) y v es solución de (2), entonces $u + v$ es solución de (2).

B) Si u es solución de (1) y v es solución de (2), entonces $u_t = v_t$.

C) Si $f(x) = B\sin(n\pi x)$, entonces la ecuación (2) admite una solución de la forma $u(x,t) = T(t)X(x)$.

D) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty$ y u solución de (2). Entonces

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = x$$

para todo $x \in [0,1]$.

Ejercicio 2 (Puntaje: 4 cada respuesta correcta; -2 cada respuesta incorrecta)

Sea la ecuación diferencial

$$1) \begin{cases} \dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = 2x^4 - 2xy \end{cases}$$

y se considera $V(x,y) = y^m - x^n$ $(m,n > 0)$.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) V es una preintegral de $1)$ para todo $m > 0$ y $n = 3$.

B) V es una preintegral de $1)$ para $m = 1$ y $n = 2$.

C) V es una preintegral de $1)$ para $m = 2$ y $n = 1$.

D) Si (I, φ) es una solución maximal de $1)$, entonces I es no acotado.

E) Si (I, φ) es una solución maximal de $1)$ con $\varphi(0) = (0,1)$, entonces $\inf I = -\infty$.

F) Existe (I, φ) solución maximal de $1)$ con $I = \mathbb{R}$

G) Si (I, φ) es una solución maximal de $1)$ con $\varphi(0) = (0,1)$, $I = (a,b)$ y $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, entonces $\lim_{t \to b} \frac{x(t)}{y(t)} = -\infty$.

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio 3 (Puntajes: 6 respuesta correcta; -2 respuesta incorrecta)

¿Para qué valores de m la función $y = x^m$ es solución de $x^2\ddot{y} - 5x\dot{y} + 8y = 0$?

A) $m = 2,\ m = 3$

B) $m = 2,\ m = 4$

C) $m = 3,\ m = 4$

D) $m = -2,\ m = -4$

Ejercicio 4 (Puntajes: 10 respuesta correcta; -3 respuesta incorrecta)

Se considera la ecuación diferencial $\dot{y} = 1 - x + y - xy$. Si $\varphi : I \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ es solución, entonces:

A) $e^{1+\varphi} = x - \frac{x^2}{2} + C$

B) $\ln|1+\varphi| = x - \frac{x^2}{2} + C$

C) $e^{\varphi} = x - \frac{x^2}{2} + C$

D) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5 (Puntajes: 10 respuesta correcta; -3 respuesta incorrecta)

Sea la ecuación $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = e^t + t^2$. ¿Cuál de las siguientes formas es la correcta para una solución particular?

A) $y_p = Ae^t + Bt^2$

B) $y_p = Ae^t + Bt^2 + Ct + D$

C) $y_p = Ate^t + Bt^2$

D) $y_p = Ate^t + Bt^2 + Ct + D$

Ejercicio 6 (Puntaje: 6 respuesta correcta; -2 respuesta incorrecta)

La transformada de Laplace de la solución a la ecuación

$$\begin{cases} \ddot{y} - y = 1 \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

es:

A) $\frac{1}{s(s+1)(s-1)}$

B) $\frac{1}{s(s+1)}$

C) $\frac{1}{s(s-1)}$

D) $\frac{1}{s-1}$

Ejercicio 7 (Puntaje: 12 respuesta correcta; -4 respuesta incorrecta)

Hallar el valor de la suma

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

usando la serie de Fourier de la función 2π-periódica:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi) \\ 2\pi - x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

A) $\frac{\pi^2}{8}$

B) $\frac{\pi^2}{4}$

C) $\frac{\pi^2}{16}$

D) $\frac{\pi^2}{2}$

Ejercicio 8 (Puntaje: 12 respuesta correcta; -3 respuesta incorrecta)

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcular la matriz exponencial e^{tA}.

A) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \end{bmatrix}$

B) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{bmatrix}$

C) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} + e^{3t} & e^{t} - e^{3t} \\ e^{t} - e^{3t} & e^{t} + e^{3t} \end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{4t} - 2e^{2t} & 4e^{4t} + e^{2t} \\ 4e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$

E) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} - e^{3t} & e^{t} - e^{3t} \\ e^{t} + e^{3t} & e^{t} + e^{3t} \end{bmatrix}$