23/2

Consultas

· Salones: B01, C12
18:00 hs.

Ejercicio 4 (Puntajes: 9 cada respuesta correcta; -6 cada respuesta incorrecta)

Sea $u(x,t)$ la solución de la ecuación del calor en $(0,\ell)\times(0,\infty)$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=0, \quad u(\ell,t)=0 \\ u(x,0) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right)}_{f(x)} \end{cases}$$

$\to X(0)\,T(t)=0 \to X(0)=0$

$\to X(\ell)\,T(t)=0 \to X(\ell)=0$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) $u(\ell/2,0) = 1+\sqrt{2}$ y $\sup_{x\in(0,\ell)}\left|\frac{u(x,t)}{e^{-\pi^2 t/\ell^2}+e^{-9\pi^2 t/\ell^2}}\right| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

B) $u_x(\ell/4,0) = \frac{\pi}{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$

• $u = X(x)\,T(t) \to X\,T' = X''\,T \to \frac{X''}{X}(x) = \frac{T'}{T}(t) = K$ cte

$$\cdot \begin{cases} X'' - KX = 0 \\ X(\ell)=0 \\ X(0)=0 \end{cases} \qquad , \qquad T' - KT = 0$$

• $K=0 \to$ Trivial.

• $K>0 \to \lambda^2 = K \to \lambda = \pm\sqrt{K} \in \mathbb{R}$

• $K<0 \to \lambda^2 = K = -|K| \to \lambda = \pm i\sqrt{|K|} \in \mathbb{C}$

• $X(x) = A\cos\left(\sqrt{|K|}\,x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{|K|}\,x\right)$

$0 = X(0) = A \to \boxed{A=0}$

$0 = X(\ell) = B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{|K|}\,\ell\right)$ sii $\sqrt{|K|}\,\ell = n\pi$

$|K| = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$

$$K = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$T' - KT = 0, \quad T' = KT, \quad T(t) = C e^{KT}$$

$$u_K(x,t) = B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cdot C e^{KT} = \bar{C} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

$\sqrt{|K|}$

Buscamos $\sqrt{|K|} = \frac{n\pi}{\ell}$ para que

Sea solución $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \end{cases} \rightarrow u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$

Sabemos que la solución "general" es $u(x,t) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$

$$u(x,0) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \rightarrow C = 1, \quad n = 1$$

Buscamos otra solución a $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = -\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right) \end{cases}$

Queremos

$$u(x,0) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) = -\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right) \rightarrow n = 3, \quad C = -\sqrt{2}$$

La solución a $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,0) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) - \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right) \end{cases}$

es

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t} - \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{3\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

$$u\left(\frac{\ell}{2},0\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{\ell}}\,\frac{\cancel{\ell}}{2}\right) - \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{\cancel{\ell}}\,\frac{\cancel{\ell}}{2}\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \qquad = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 1 + \sqrt{2}$$

$$\sup_{x\in(0,\ell)} \left| \frac{u(x,t)}{e^{-\pi^2 t/\ell^2} + e^{-9\pi^2 t/\ell^2}} \right| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$$u(x,t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t} - \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{9\pi^2}{\ell^2}t}$$

$$\left| \frac{u(x,t)}{e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t} + e^{-\frac{9\pi^2}{\ell^2}t}} \right|$$

Buscamos máx $u(x,t)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t} - \sqrt{2}\,\frac{3\pi}{\ell}\cos\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{9\pi^2}{\ell^2}t}$$

$$= \frac{\pi}{\ell}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t} - 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{9\pi^2}{\ell^2}t}\right]$$

$x \in (0, \ell)$

$x = \frac{\ell}{2}$ ✓

- sup se da en $x = \frac{\ell}{2}$ y vale

$$u\left(\frac{\ell}{2},t\right) = e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t} + \sqrt{2}\,e^{-\frac{9\pi^2}{\ell^2}t}$$

Ejercicio 2 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

pXt = K

con f y g funciones de $\mathbb{R}^2$ a valores en $\mathbb{R}$ de clase C^1.

Se sabe que $C = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$ es el conjunto de puntos de equilibrio y $\boxed{H(x,y) = xy}$ es una preintegral.

$(-\infty, 0] \subset I$

$[0, +\infty) \subset I$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) El origen $(0,0)$ es necesariamente estable para el futuro.

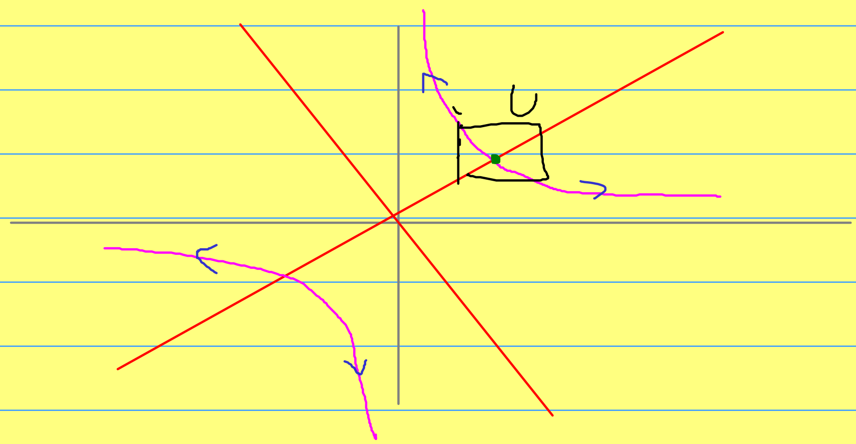
B) Toda solución maximal (I,φ) satisface que I es ~~no acotado.~~

C) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (-1,0)$ entonces $\varphi(t) = (x(t),0)$ con $x : I \to \mathbb{R}$.

D) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,0)$ y $\phi(0) = (-1,0)$ entonces I es no acotado superiormente y $\|\varphi(t)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

E) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,3)$ y $\varphi(t) = (x(t),y(t))$ entonces $y(t)$ es acotada y $x(t)$ no lo es.

- Puntos críticos
- Soluciones



No podemos asegurar en que sentido se mueve las flechas.

• Si acerca rojas: $K_n = U \times [0,n]$, como la solución tiende al punto de equilibrio $(\bar{x},\bar{y}) \in U$ entonces $\varphi(t,(x,y))$ no se escapa por U. Por lo tanto se escapa por $[0,n]$, $\Rightarrow [0,n] \subset I$.
Como esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $[0,+\infty) \subset I \Rightarrow I$ no es acotado.

• Si aleja rojas: $K_n = U \times [-n,0]$, como $\varphi(t,(x,y))$ tiende al punto de equilibrio $(\bar{x},\bar{y}) \in U$ a pasado, entonces la solución no se escapa por U, entonces se escapa por $[-n,0]$

$\Rightarrow [-n, 0] \subset I$

$\forall n, [-n, 0] \subset I \Rightarrow (-\infty, 0] \subset I$

y entonces I es no acotado