22/2

Clase de consulta

Ejercicio 3 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)

Sea el sistema lineal $\dot{X} = AX$ con A una matriz 3×3 a coeficientes reales. Se sabe que A es semejante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda$$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

✓ **A)** El origen $(0,0)$ es estable para el futuro.

✗ **B)** El origen $(0,0)$ es estable para el pasado.

✓ **C)** La única solución periódica es la de equilibrio.

Recordar que una solución $\varphi(t)$ es periódica si existe $T>0$ con $\varphi(t+T)=\varphi(t)$ para todo t.

✓ **D)** Existen soluciones $\varphi(t)$ tales $\lim_{t\to-\infty}\|\varphi(t)\| = +\infty$.

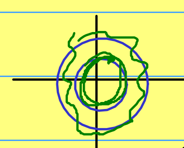
$$\dot{X} = AX \rightarrow X(t) = X_0 e^{At}$$

$$p_A: -\lambda[-\lambda(-1-\lambda)] + 3[-3] = -\lambda^2[1+\lambda] - 9$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 - 9$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ El eje z contiene

"Bloque" complejo: $\lambda^2 + 9 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 3i$



$$\varphi(t) = (r_0\cos(3t), r_0\sin(3t), z_0 e^{-t})$$

$$\|\varphi(t)\| = \sqrt{\underbrace{r_0^2\cos^2(3t) + r_0^2\sin^2(3t)}_{1} + z_0^2 e^{-2t}}$$

$$= \sqrt{r_0^2 + z_0^2 e^{-2t}} \rightarrow \lim_{t\to-\infty} \|\varphi(t)\| = +\infty$$

Ejercicio 6 (Puntaje: 18 respuesta correcta; -3.5 respuesta incorrecta)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = -2x - \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - \alpha & 1 \\ -2 & -\lambda - \alpha \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, y la función $V(x,y) = 2x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

Indicar la opción correcta:

- **A)** La función $V(x,y)$ es de Liapunov en un entorno de $(0,0)$ para el valor $\lambda = 0$.
- **B)** Si $\lambda = \sqrt{2}$ o $\lambda = -\sqrt{2}$ el $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable para el futuro.
- **C)** Si $\lambda \geq 0$ el $(0,0)$ es un punto de equilibrio ~~estable~~ para el futuro.
- **D)** La función $V(x,y)$ es una preintegral para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y si $|\lambda| < \sqrt{2}$ el $(0,0)$ es estable para el futuro.
- **E)** La función $V(x,y)$ es una preintegral para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y si $|\lambda| < \sqrt{2}$ el $(0,0)$ es asintóticamente estable para el futuro.

Recordar que V *es de Lyapunov si* $V(x,y) > 0$ *y* $\dot{V}(x,y) < 0$ *para* $(x,y) \neq (0,0)$.

$(\lambda - \alpha)(-\lambda - \alpha) + 2 =$
$-\lambda^2 + \alpha^2 + 2 = 0$
$\alpha^2 = \lambda^2 - 2$
$\alpha = \pm\sqrt{\lambda^2 - 2}$

$|\lambda| < \sqrt{2} \Rightarrow \lambda^2 < 2$
$\lambda^2 - 2 < 0 \Rightarrow \alpha \in I_m$

$\lambda = 0$, $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$, $V(x,y) = 2x^2 + y^2$

V es de Liapunov: Si $V(0,0) < V(x,y)$ ✓

- $\dot{V} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y}$
$= 4xy + 2y(-2x) = 4xy - 4xy = 0$

- V es una preintegral: $\dot{V} = 0$ ✓

Para ver que es estable, hallamos valores propios.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - \alpha & 1 \\ -2 & -\lambda - \alpha \end{pmatrix}$$

$p_\alpha = (\lambda - \alpha)(-\lambda - \alpha) + 2 = -\lambda^2 + \alpha^2 + 2$

$-\lambda^2 + \alpha^2 + 2 = 0 \rightarrow$

$\alpha = \pm\sqrt{\lambda^2 - 2}$

$\lambda^2 - 2 > 0 \Rightarrow$ Los vap tiene sg distinto
$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ ...
$\lambda^2 - 2 < 0 \Rightarrow \alpha \in I_m$ (pura)

2. Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\epsilon - \overbrace{(x^2+y^2)}^{r^2}) \\ \dot{y} = x + y(\epsilon - \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}) \end{cases}$$

con $\epsilon > 0$.

a) Probar que está en las hipótesis de Picard.

b) Estudiar la estabilidad del origen.

c) Dibujar el diagrama de fase. Se sugiere estudiar el sistema en polares.

d) Estudiar intervalos maximales de sus soluciones.

$x = r\cos\theta \rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$

$\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y + x(\varepsilon - r^2)) + 2y(x + y(\varepsilon - r^2))$

$2r\dot{r}$

$\cancel{2}r\dot{r} = \cancel{2}\left[\cancel{-xy} + \overbrace{x^2(\varepsilon - r^2) + \cancel{xy} + y^2}^{r^2}(\varepsilon - r^2)\right]$

$\cancel{r}\dot{r} = r^{\cancel{2}}(\varepsilon - r^2) \rightarrow \boxed{\dot{r} = r(\varepsilon - r^2)}$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\,\text{sen}(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\cos(\theta) + r\cos(\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

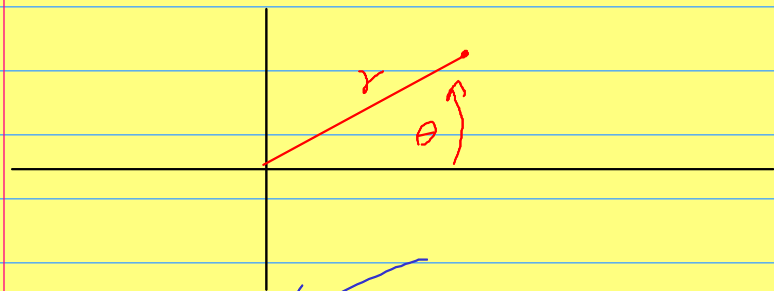
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\epsilon - \overbrace{(x^2+y^2)}^{r^2}) \\ \dot{y} = x + y(\epsilon - (x^2+y^2)) \end{cases}$$

$\dot{\theta} = -\dfrac{(\dot{x} - \dot{r}\cos\theta)}{r\,\text{sen}(\theta)} = -\dfrac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[-y + x(\varepsilon - r^2) - r(\varepsilon - r^2)\cos\theta\right]$

$= (-)\dfrac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[\boxed{-}r\,\text{sen}\,\theta + \cancel{r\cos(\theta)(\varepsilon - r^2)} - \cancel{r\cos\theta(\varepsilon - r^2)}\right]$ 1

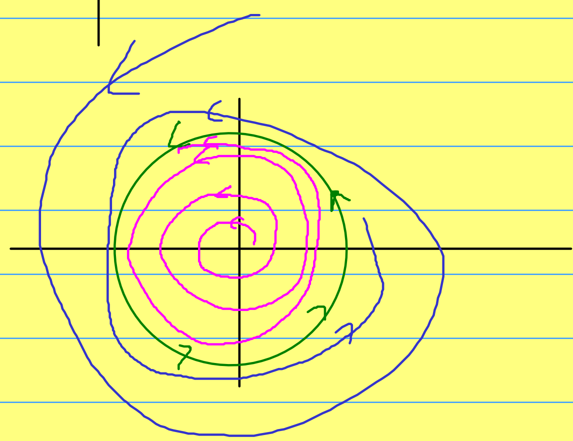
$$= -\frac{1}{r\,sen\,\theta}(-r\,sen\,\theta) = 1$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\varepsilon - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Gira en sentido antihorario.}$$



$sg(\dot{r}) = sg(\varepsilon - r^2)$

Además si $r^2 = \varepsilon$, $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$



$r^2 = \varepsilon$

$\dot{r} > 0$ si $\varepsilon > r^2 \geq 0$

$\dot{r} < 0$ si $\varepsilon < r^2$

Ejercicio 2 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

con f y g funciones de $\mathbb{R}^2$ a valores en $\mathbb{R}$ de clase C^1.

Se sabe que $C = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$ es el conjunto de puntos de equilibrio y $H(x,y) = xy$ es una preintegral.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) El origen $(0,0)$ es necesariamente estable para el futuro.

B) Toda solución maximal (I,φ) satisface que I es no acotado.

C) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (-1,0)$ entonces $\varphi(t) = (x(t),0)$ con $x : I \to \mathbb{R}$.

D) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,0)$ y $\dot{\varphi}(0) = (-1,0)$ entonces I es no acotado superiormente y $\|\varphi(t)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

E) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,3)$ y $\varphi(t) = (x(t),y(t))$ entonces $y(t)$ es acotada y $x(t)$ no lo es.

$x^2 = y^2 \to |x| = \sqrt{y^2} = y$

$x = y$

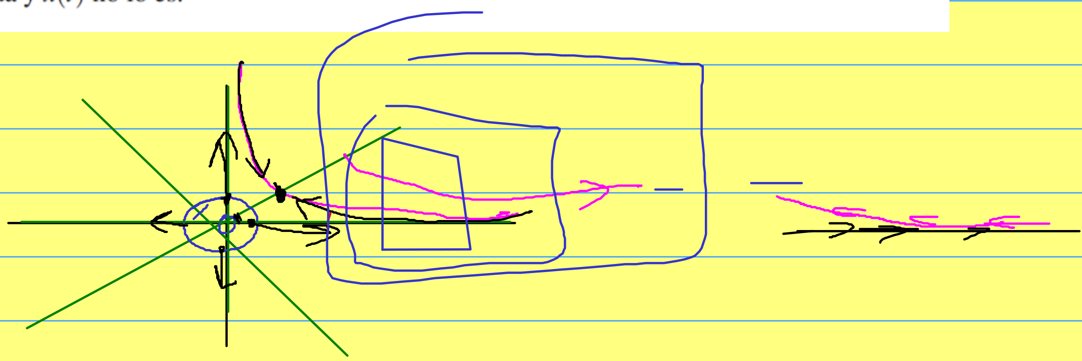
$x = -y$

$xy = K \to y = \frac{K}{x}$

$0 = \dot{H} = \dot{x}y + x\dot{y} = f(x,y)\,y + x\,g(x,y)$

$K > 0$

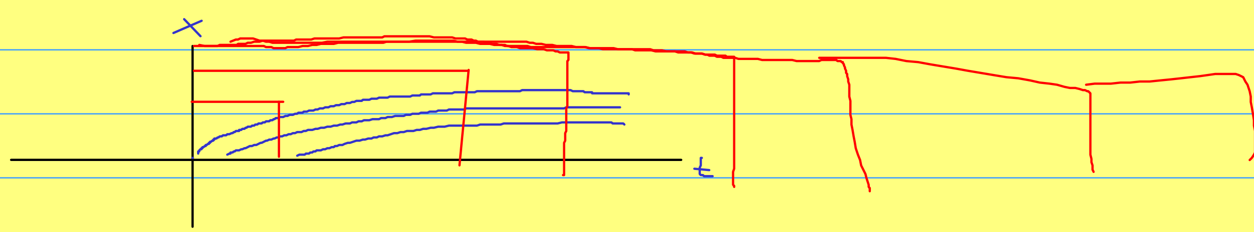
$y = \frac{K}{x}$



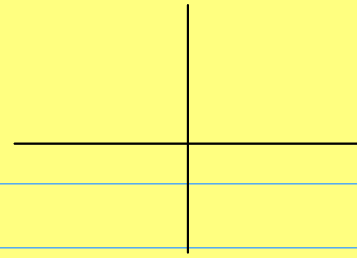
$\varphi : I \times U \to \mathbb{R}^2$ solución maximal

$I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$

Escape de compactos: Si $\varphi : I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es solución maximal, entonces la solución $\varphi(t,(t_0,x_0))$ se escapa al futuro y al pasado de todo compacto $K \subset I \times U$



$0 = \dot{x}y + x\dot{y}$



Si $x=0$: $\quad \left.\begin{array}{l} 0 = \dot{x}y \\ |y| > 0 \end{array}\right\} \boxed{\dot{x} = 0}$