N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas V/F

Ej. 1A	Ej. 1B	Ej. 1C	Ej. 1D	Ej. 1E

Ej. 2A	Ej. 2B	Ej. 2C	Ej. 2D	Ej. 2E

Ej. 3A	Ej. 3B	Ej. 3C	Ej. 3D

Ej. 4A	Ej. 4B

Respuestas MO

Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8

Importante

- El examen dura 3 horas.
- El examen es de 100 puntos en total y se aprueba con 50 o mas puntos.
- Solo serán válidas las respuestas a los ejercicios dentro del cuadro de respuestas.
- Los puntajes están indicados al comienzo de cada ejercicio. Un ejercicio o parte de un ejercicio sin responder no lleva puntaje (es decir 0 puntos).

Ejercicios de Verdadero/Falso

Ejercicio 1 (Puntajes: 1.5 cada respuesta correcta; -1 cada respuesta incorrecta)

Dada la ecuación $(*)$ $y'' - y = 4x$ indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) La solución general de $(*)$ es de la forma $\varphi(x) = ae^x + be^{-x} - 4x$ y $\psi(x) = e^x + \sqrt{2}e^{-x} - 4x$ es la solución tal que $\psi(0) = 1 + \sqrt{2}$ y $\psi'(0) = -3 - \sqrt{2}$.

B) La solución general de $(*)$ es de la forma $\varphi(x) = a\sin(x) + b\cos(x) - 4x$ y $\psi(x) = \sin(x) + \sqrt{2}\cos(x) - 4x$ es la solución tal que $\psi(0) = \sqrt{2}$ y $\psi'(0) = -3$.

C) La solución general de $(*)$ es de la forma $\varphi(x) = ae^x + (b-2)e^{-x} - 4x$ y las soluciones que cumplen $\psi(0) = -\psi'(0)$ son de la forma $\psi(x) = 2e^x + (b-2)e^{-x} - 4x$.

D) La solución general de $(*)$ es de la forma $\varphi(x) = a(e^x + e^{-x}) - 4bx$.

E) La solución general de $(*)$ es de la forma $\varphi(x) = ae^x + bxe^x - 4x$.

Aclaración: recordar que a y b representan parámetros reales.

Ejercicio 2 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

con f y g funciones de $\mathbb{R}^2$ a valores en $\mathbb{R}$ de clase C^1.

Se sabe que $C = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$ es el conjunto de puntos de equilibrio y $H(x,y) = xy$ es una preintegral.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) El origen $(0,0)$ es necesariamente estable para el futuro.

B) Toda solución maximal (I,φ) satisface que I es no acotado.

C) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (-1,0)$ entonces $\varphi(t) = (x(t),0)$ con $x : I \to \mathbb{R}$.

D) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,0)$ y $\dot{\varphi}(0) = (-1,0)$ entonces I es no acotado superiormente y $\|\varphi(t)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

E) Si (I,φ) es solución maximal con $\varphi(0) = (1,3)$ y $\varphi(t) = (x(t),y(t))$ entonces $y(t)$ es acotada y $x(t)$ no lo es.

Ejercicio 3 (Puntajes: 3.5 cada respuesta correcta; -2.5 cada respuesta incorrecta)

Sea el sistema lineal $\dot{X} = AX$ con A una matriz 3×3 a coeficientes reales. Se sabe que A es semejante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) El origen $(0,0)$ es estable para el futuro.

B) El origen $(0,0)$ es estable para el pasado.

C) La única solución periódica es la de equilibrio.

Recordar que una solución $\varphi(t)$ es periódica si existe $T > 0$ con $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ para todo t.

D) Existen soluciones $\varphi(t)$ tales $\lim_{t\to-\infty} \|\varphi(t)\| = +\infty$.

Ejercicio 4 (Puntajes: 9 cada respuesta correcta; -6 cada respuesta incorrecta)

Sea $u(x,t)$ la solución de la ecuación del calor en $(0,\ell) \times (0,\infty)$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) \end{cases}$$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) $u(\ell/2,0) = 1 + \sqrt{2}$ y $\sup_{x\in(0,\ell)} \left|\frac{u(x,t)}{e^{-\pi^2 t/\ell^2} + e^{-9\pi^2 t/\ell^2}}\right| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

B) $u_x(\ell/4,0) = \frac{\pi}{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)$

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio 5 (Puntaje: 6 respuesta correcta; -1 respuesta incorrecta)

¿Cuál es la solución general de la ecuación $\dot{x} = 2x + 1$?

Respuesta:

A) $x = Ce^{2t} - 1$

B) $x = Ce^{t/2} - 2$

C) $x = t^2 + t + C$

D) $x = e^{t/2} + C$

E) $x = Ce^{2t} + 1$

F) $x = Ce^{2t} - 1/2$

G) $x = e^{2t} + C$

H) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 6 (Puntaje: 18 respuesta correcta; -3.5 respuesta incorrecta)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = -2x - \lambda y \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, y la función $V(x,y) = 2x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

Indicar la opción correcta:

A) La función $V(x,y)$ es de Liapunov en un entorno de $(0,0)$ para el valor $\lambda = 0$.

B) Si $\lambda = \sqrt{2}$ o $\lambda = -\sqrt{2}$ el $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable para el futuro.

C) Si $\lambda \geq 0$ el $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable para el futuro.

D) La función $V(x,y)$ es una preintegral para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y si $|\lambda| < \sqrt{2}$ el $(0,0)$ es estable para el futuro.

E) La función $V(x,y)$ es una preintegral para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y si $|\lambda| < \sqrt{2}$ el $(0,0)$ es asintóticamente estable para el futuro.

Recordar que V es de Lyapunov si $V(x,y) > 0$ *y* $\dot{V}(x,y) < 0$ *para* $(x,y) \neq (0,0)$.

Ejercicio 7 (Puntaje: 12 respuesta correcta; -2.5 respuesta incorrecta)

Sea φ solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = t \\ \dot{y} = x - y + 1 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Hallar el valor de $\varphi(2)$:

A) $\varphi(2) = (3, 3e^2 - 1)$

B) $\varphi(2) = (1, 3e^2 - 1)$

C) $\varphi(2) = (3, -e^{-2} + 3)$

D) $\varphi(2) = (0, 3e^2 - 1)$

E) $\varphi(2) = (2, -e^{-2} + 3)$

Ejercicio 8 (Puntaje: 7 respuesta correcta; -1.5 respuesta incorrecta)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica tal que $f(x) = |x|$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$.

Hallar la serie de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$:

A) $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x)$

B) $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos((2n-1)x)$

C) $Sf(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$

D) $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$

E) $Sf(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} [\cos((2n-1)x) + \sin((2n-1)x)]$
