Física 3 - Solución del examen

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

10 de febrero de 2021

Problema 1

a) La potencia disipada en un conductor con resistencia R está dada por $P = Ri^2$. Como los dos conductores disipan la misma potencia

$$R_1 i_1^2 = R_2 i_2^2$$

La corriente a través de un conductor de área transversal A se puede escribir en términos de la densidad de corriente j como $i = jA$. Además, la resistencia de un conductor cilíndrico de resistividad ρ es $R = \frac{\rho L}{A}$, entonces de la ecuación anterior tenemos que

$$\frac{\rho_1 L_1}{A_1}(j_1 A_1)^2 = \frac{\rho_2 L_2}{A_2}(j_2 A_2)^2 \Rightarrow \rho_1 j_1^2 L_1 A_1 = \rho_2 j_2^2 L_2 A_2$$

Pero como los dos conductores tienen el mismo volumen, $L_1 A_1 = L_2 A_2$. Podemos despejar entonces el cociente entre las densidades en términos de las resistividades de los conductores

$$\frac{j_1}{j_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

b) Como la potencia disipada es la misma en los dos conductores, aplicamos el mismo razonamiento que en la parte **a)** del problema y obtenemos el mismo resultado (que no depende de si los conductores se conectan en serie o en paralelo)

$$\frac{j_1}{j_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Como $\rho_2 = 4\rho_1$, tenemos que

$$j_1 = 2j_2$$

Ahora, los dos conductores se conectan al mismo potencial V. Por la ley de Ohm

$$R_1 i_1 = R_2 i_2$$

Utilizando la expresión para la resistencia de un conductor cilíndrico y expresando la intensidad en términos de la densidad de corriente

$$\frac{\rho_1 L_1}{A_1} j_1 A_1 = \frac{\rho_2 L_2}{A_2} j_2 A_2 \Rightarrow \rho_1 j_1 L_1 = \rho_2 j_2 L_2$$

Sustituyendo las relaciones entre las densidades y las resistividades obtenemos

$$\frac{L_1}{L_2} = 2$$

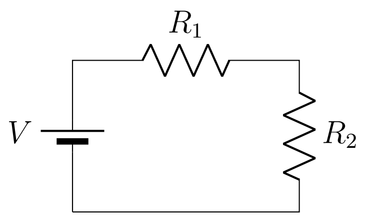
c) La carga almacenada en el capacitor se puede escribir en términos de la diferencia de potencial entre sus extremos como

$$Q = CV_C$$

El potencial en el capacitor es el mismo que el potencial en la resistencia R_2, ya que ambos elementos están conectados en paralelo. Por la ley de Ohm

$$Q = CR_2 i_2$$

Tenemos que calcular entonces la corriente a través de la resistencia R_2. Cuando el circuito estuvo conectado por un tiempo largo, ya no circula corriente por el capacitor, es decir que el circuito es equivalente a



La corriente es la misma por ambas resistencias, entonces aplicando la ley de mallas obtenemos

$$V - R_1 i - R_2 i = 0 \Rightarrow i = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Sustituyendo en la expresión para la carga

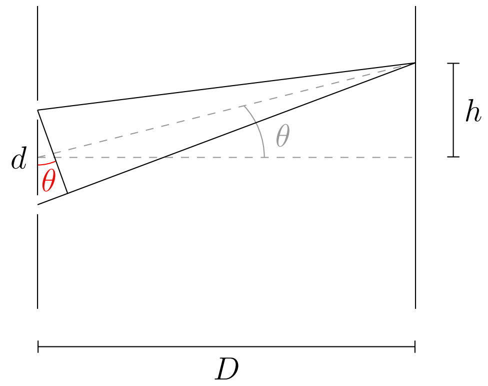
$$Q = \frac{CVR_2}{R_1 + R_2}$$

La energía almacenada en el capacitor está dada por

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2}$$

Problema 2

a) Calculamos primero las posiciones angulares θ (indicadas en gris en el dibujo) de los centros de las franjas brillantes. Los centros están en los puntos donde hay interferencia constructiva entre las dos ondas que salen de las rendijas.



Hay interferencia constructiva cuando la diferencia de caminos es un múltiplo entero de la longitud de onda, es decir

$$\Delta r = m\lambda$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Además, como $d \ll D$, los haces son aproximadamente paralelos, y la diferencia de caminos es, como se indica en el dibujo,

$$\Delta r \approx d \sin \theta$$

Entonces, las posiciones angulares de las franjas brillantes están dadas por

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Además, para θ pequeño, $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{h}{D}$, donde h es la altura de las franjas brillantes en la pantalla. Sustituyendo esto en la ecuación anterior y despejando h obtenemos

$$h_m = \frac{m\lambda D}{d}$$

La distancia del máximo central a la primera franja brillante es entonces

$$h = h_1 - h_0 = \frac{\lambda D}{d} = 2{,}62\,\mathrm{mm}$$

b) Los centros de las bandas oscuras se encuentran en los puntos donde hay interferencia destructiva, lo cual ocurre cuando la diferencia de caminos entre las ondas es un número semientero de longitudes de onda. La posición angular de las bandas oscuras es entonces

$$d\sin\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$

y la altura

$$h_m = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda D}{d}$$

La distancia entre el centro de la primera y la segunda banda oscura es

$$h = h_1 - h_0 = \frac{3}{2}\frac{\lambda D}{d} - \frac{1}{2}\frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{d} = 2{,}62\,\mathrm{mm}$$

c) Buscamos las posiciones de las franjas brillantes en la configuración con la mica. Al agregar la mica sobre una de las rendijas, tenemos que considerar que existen dos contribuciones a la diferencia de camino óptico. Una de ellas Δr_1, al igual que en el caso sin mica, se debe a que los haces que parten de las distintas rendijas recorren distancias diferentes antes de llegar a la pantalla. Esta contribución es al igual que antes

$$\Delta r_1 = d\sin\theta$$

La otra contribución Δr_2 es producida por la presencia de la mica en una rendija. Dado que ahora los rayos realizan parte de su camino por medios con distinto índice de refracción tenemos que

$$\Delta r_2 = ne - n_{\mathrm{aire}}e = (n-1)e$$

donde e es el espesor de la mica. Las posiciones angulares de los máximos están dadas por

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 = d\sin\theta + (n-1)e = m\lambda$$

Sustituyendo $\sin\theta \approx \frac{h}{D}$ y despejando tenemos

$$h_m = \frac{m\lambda D}{d} - \frac{(n-1)eD}{d}$$

La posición del máximo central es

$$h_0 = -\frac{(n-1)eD}{d}$$

Dado que este valor es negativo, podemos concluir que al agregar la mica todo el patrón de interferencia se corre hacia abajo. Esto implica además que, para lograr que el máximo central en la configuración con mica coincida con la posición que correspondía con el sexto máximo en la configuración sin mica se deben considerar el valor $m = -5$, que corresponde al sexto máximo en la parte inferior de la pantalla. Tenemos entonces

$$-\frac{(n-1)eD}{d} = -\frac{5\lambda D}{d}$$

Despejamos el espesor de la mica

$$e = \frac{5\lambda}{n-1} = 5{,}461\,\mathrm{\mu m}$$

Problema 3

a) El volumen de partículas que atraviesa el círculo $\mathcal{C}$ en un tiempo Δt es igual al de un cilindro de área igual a la de la nube de partículas, y altura igual a $v\Delta t$

$$V = \pi R^2 v \Delta t$$

Como la densidad de carga de la nube es uniforme, la carga que atraviesa la superficie es entonces

$$\Delta q = \rho V = \pi R^2 v \Delta t \rho$$

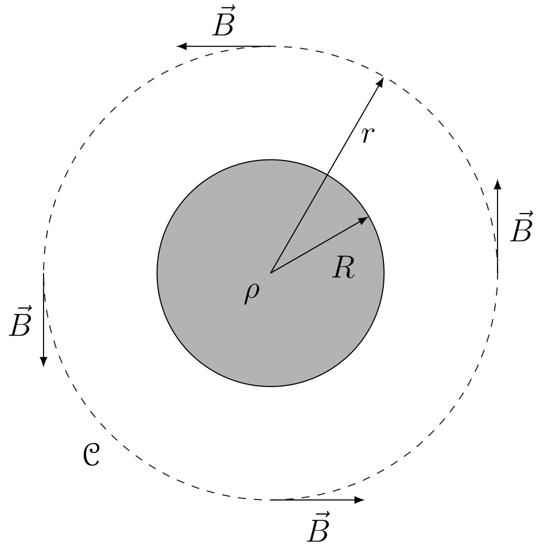
b) Como las partículas se mueven a velocidad constante, la corriente eléctrica a través de la superficie $\mathcal{C}$ es

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \pi R^2 v \rho$$

c) Para hallar el campo fuera de la nube utilizamos la ley de Ampère. Por la simetría del problema, el campo sólo puede depender de la distancia r a la nube de partículas. Además, debe ser en la dirección del versor $\hat{e}_\phi$ en coordenadas cilíndricas

$$\vec{B} = B(r)\hat{e}_\phi$$

Consideramos una curva amperiana circular de radio r.



La circulación de campo magnético es

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi d\ell = \oint_{\mathcal{C}} B(r) d\ell$$

Como $B(r)$ es constante en la curva sale de la integral, y la circulación es

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \oint_{\mathcal{C}} d\ell = B(r) 2\pi r$$

Aplicando la ley de Ampère

$$B(r)2\pi r = \mu_0 i$$

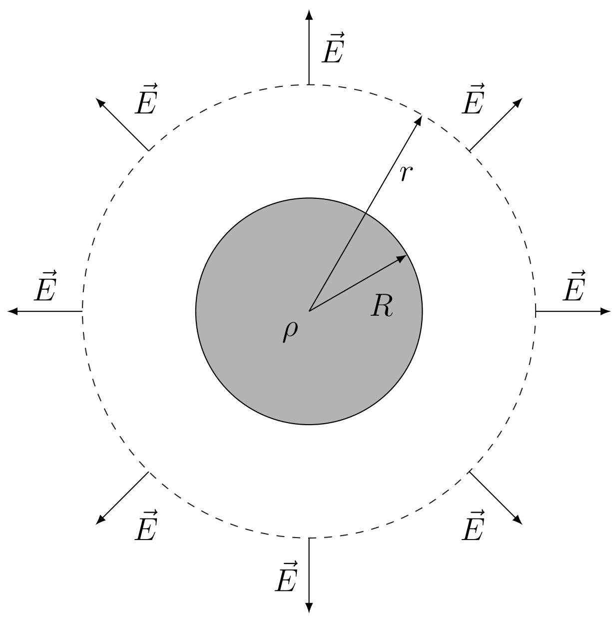
Sustituimos la expresión de la corriente que atraviesa la superficie calculada en la parte anterior del problema y despejamos $B(r)$. Finalmente obtenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho v R^2}{2r}\hat{e}_\phi$$

d) Con la nube en reposo, tenemos un cilindro cargado infinito de densidad de carga ρ. Para calcular el campo eléctrico utilizamos la ley de Gauss. De nuevo por la simetría del problema, el campo sólo puede depender de la distancia r a la nube de partículas, y debe ser ahora en la dirección radial $\hat{e}_r$ en coordenadas cilíndricas

$$\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$$

Consideramos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y altura h centrada en la nube de partículas.



El flujo de campo eléctrico a través de esta superficie es la suma del flujo en la cara lateral y en las tapas del cilindro. Pero el flujo en las tapas es 0 porque la normal a la superficie es perpendicular al campo eléctrico, entonces queda sólo el flujo sobre la cara lateral

$$\oint_{\mathbb{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint_{\mathbb{S}} E(r)\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r da = \oint_{\mathbb{S}} E(r) da$$

Como el campo eléctrico es constante sobre la cara lateral sale de la integral y obtenemos

$$\oint_{\mathbb{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(r) \oint_{\mathbb{S}} da = E(r) 2\pi r h$$

Aplicando la ley de Gauss, tenemos que

$$E(r)2\pi r h = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Para calcular la carga encerrada en la superficie cilíndrica distinguimos dos situaciones. Si $r < R$, entonces la carga encerrada es igual al volumen de la superficie gaussiana por la densidad de carga

$$Q_{\text{enc}} = \rho \pi r^2 h$$

En este caso, utilizando la expresión obtenida de la ley de Gauss vemos que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{e}_r$$

Si $r \geq R$, entonces la carga encerrada es

$$Q_{\text{enc}} = \rho \pi R^2 h$$

y el campo eléctrico es entonces

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r$$