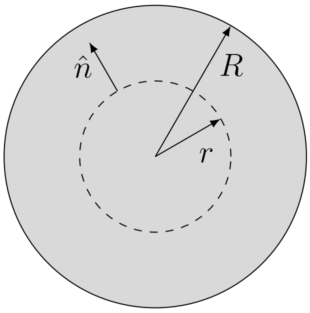
Física 3 - Solución del examen

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

23 de diciembre de 2021

Problema 1

a) Consideramos una esfera gaussiana concéntrica a la esfera cargada, de radio $r < R$ como se muestra en la figura, y aplicamos la ley de Gauss.



Por un lado, por la simetría del problema el campo eléctrico es $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, entonces el flujo a través de la esfera gaussiana es

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \oint E(r)\hat{r} \cdot \hat{n} d\vec{a}$$

El vector normal a la esfera es $\hat{r}$, y como r es constante en la superficie, $E(r)$ sale de la integral

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = E(r) \oint \hat{r} \cdot \hat{r} da = E(r) \oint ds = 4\pi r^2 E(r)$$

Por otro lado, la carga encerrada por la esfera gaussiana es

$$Q = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

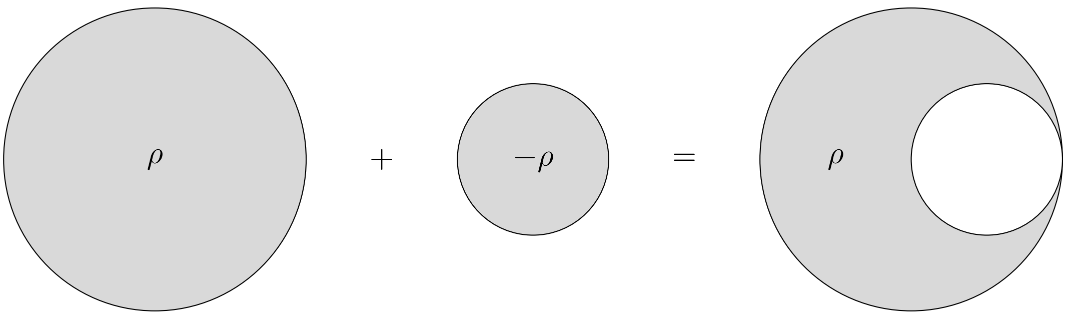
entonces por la ley de Gauss tenemos

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

y finalmente el campo eléctrico para $r < R$ es

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

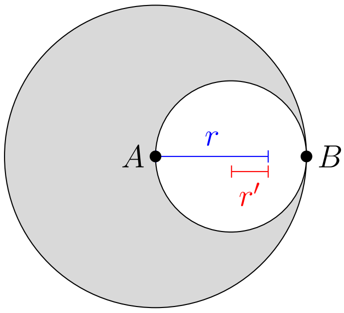
b) La esfera con el hueco se puede escribir como la superposición de una esfera de radio $2R$ y densidad de carga ρ, y otra esfera de radio R y densidad de carga $-\rho$, situada en la posición del hueco.



Por principio de superposición, el campo eléctrico es entonces la suma de los campos de esas dos esferas. Podemos escribir entonces

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} + \frac{(-\rho)r'}{3\varepsilon_0}\hat{r}'$$

donde $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ son los versores desde el centro de la esfera grande y la chica respectivamente. Sobre el segmento AB, ambos son en la dirección horizontal $\hat{\imath}$, y además, $r'\hat{r}' = (r-R)\hat{r} = (r-R)\hat{\imath}$.



Entonces el campo eléctrico sobre el segmento AB es

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r\hat{\imath} - (r-R)\hat{\imath}\right) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\hat{\imath}$$

c) Calculamos la diferencia de potencial entre A y B integrando el campo eléctrico sobre el segmento AB

$$\Delta V_{AB} = \int_{AB} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}\,dx = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\int_0^{2R} dx = \frac{2\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

Problema 2

a) El flujo de campo magnético a través de la superficie formada por los rieles y la barra es

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = -BA = -B\ell x(t)$$

donde $x(t)$ es la posicion de la barra medida desde el extremo derecho de los rieles, y tomamos la normal a la superficie en la dirección saliente al plano del dibujo.

Aplicando la ley de Faraday, la *fem* inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ell\frac{dx(t)}{dt} = B\ell v(t)$$

b) Determinamos la corriente en el circuito aplicando la ley de mallas

$$\mathcal{E} - Ri = 0$$

Usando la expresión ya calculada para la *fem* y despejando tenemos que

$$i = \frac{B\ell v(t)}{R}$$

La *fem* tiene signo positivo según la convención que tomamos para la normal a la superficie (saliente), por lo que es antihoraria, y la corriente también. Es decir, si consideramos una curva C coincidente con el circuito, orientada en sentido antihorario (de manera tal de ser consistentes con la normal saliente), entonces por la ley de Faraday la integral de línea del campo eléctrico es

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ell\frac{dx(t)}{dt} = B\ell v(t)$$

que es positiva cuando $v(t)$ es positiva. Por otro lado, la integral de línea del campo eléctrico se relaciona con la caída de potencial en la resistencia del circuito mediante

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = V_R$$

siempre y cuando V_R se defina como la caída de potencial en la resistencia que aparece en la ley de mallas cuando el circuito se recorre en sentido antihorario (es decir, recorriendo el circuito en sentido antihorario, se atraviesa primero "+" de V_R). Si definimos i como la corriente tomada como positiva en sentido antihorario entonces $V_R = Ri$ y la positividad de la integral de línea del campo eléctrico implica la positividad de i.
Alternativamente, al moverse la barra hacia la izquierda el flujo de campo magnético (entrante) a través de la superficie aumenta. Por la ley de Lenz, la corriente inducida debe oponerse a esa variación de flujo, es decir, debe ser tal que tienda a hacer disminuir el flujo magnético entrante. Para que esto ocurra el campo magnético que genera la corriente debe ser saliente, y entonces la corriente debe ser antihoraria.

c) La fuerza magnética sobre un conductor recto es

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$$

donde $\vec{\ell}$ es colineal al conductor y en la dirección de la corriente. Como la corriente en la barra es hacia abajo, la fuerza sobre la barra es

$$\vec{F} = -i\ell B\hat{\imath} = \frac{(B\ell)^2 v(t)}{R}\hat{\imath}$$

tomando $\hat{\imath}$ hacia la izquierda.

d) Hallamos la velocidad de la barra en función del tiempo aplicando la segunda ley de Newton

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{(B\ell)^2}{R}v(t)$$

La solución general a esta ecuación diferencial es

$$v(t) = Ae^{-\frac{(B\ell)^2}{mR}t}$$

Imponiendo la condición de que $v(0) = v_0$, tenemos que $A = v_0$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{(B\ell)^2}{mR}t}$$

Buscamos t tal que $v(t) = \dfrac{v0}{3}$

$$\frac{v_0}{3} = v_0 e^{-\frac{(B\ell)^2}{mR}t} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-\frac{(B\ell)^2}{mR}t}$$

Tomando el logaritmo a ambos lados y despejando

$$t = \frac{mR}{(B\ell)^2}\ln(3)$$

e) La *fem* inducida sobre el circuito es igual que antes

$$\varepsilon = B\ell v$$

donde ahora la velocidad v es constante. Aplicando la ley de mallas tenemos que

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{B\ell v}{L}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial para hallar la corriente. La solución general es la suma de una solución particular y la solución general de la homogénea.

Una solución particular es la constante

$$i_P = \frac{B\ell v}{R}$$

y la ecuación homogénea es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

que tiene solución

$$i_H = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Entonces

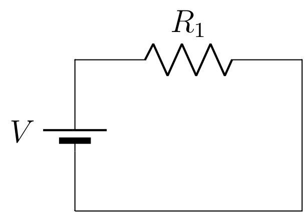
$$i(t) = \frac{B\ell v}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Imponiendo la condicion inicial $i(0) = 0$, tenenmos que $A = -\frac{B\ell v}{R}$, y

$$i(t) = \frac{B\ell v}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Problema 3

a) En el régimen estacionario las corrientes en el circuito son constantes. Esto implica que la caída de potencial en el inductor es 0 y este actúa como un cable. Toda la corriente del circuito va a circular entonces por la rama del inductor, y el circuito será de la forma



Aplicando la ley de mallas, la caída de potencial en la resistencia R_1 es

$$\Delta V_R = V$$

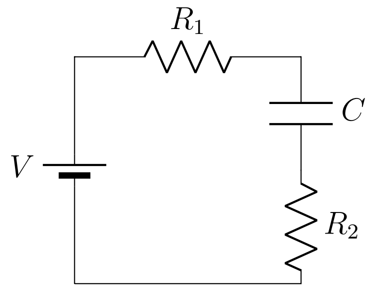
Además, como la caída de potencial en el inductor es 0, y la corriente por la resistencia R_2 también es 0 (dado que en régimen estacionario no circula corriente por el condensador), por la ley de mallas la caída de potencial en el capacitor también debe ser 0

$$V_C + R_2 i_2 = V_L$$

por lo que

$$Q = 0$$

b) Al cerrarse el interruptor, el circuito es



Aplicando la ley de mallas tenemos que

$$V - R_1 i - R_2 i - \frac{Q}{C} = 0$$

y sustituyendo $\frac{dQ}{dt} = i$

$$(R_1 + R_2)\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

Resolvemos esta ecuación para hallar la carga en función del tiempo. Una solución particular es la constante

$$Q_P = VC$$

y la solución general de la homogénea es

$$Q_H = Ae^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t}$$

entonces $Q(t)$ es de la forma

$$Q(t) = VC + Ae^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t}$$

Imponiendo la condición inicial $Q(0) = 0$, que es la carga final del capacitor en la parte a) del ejercicio, obtenemos que $A = -VC$. Finalmente dividimos Q entre C para obtener el voltaje en el capacitor

$$V_C(t) = V\left(1 - e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t}\right)$$

c) La energía en un capacitor está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}CV_C^2$$

La energía es máxima cuando el capacitor se carga totalmente en $t \to \infty$. En ese límite el voltaje es igual al de la fuente, entonces

$$U_{\max} = \tfrac{1}{2}CV^2$$

Buscamos entonces el tiempo t tal que $U = \frac{1}{4}CV^2$

$$\tfrac{1}{4}CV^2 = \tfrac{1}{2}CV_C^2 = \tfrac{1}{2}CV^2\left(1 - e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t}\right)^2$$

Despejando obtenemos

$$t = (R_1 + R_2)C \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$