Ejercicio 1

Parte a)

Supongo una carga q en las placas del capacitor. Aplicando Ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{k\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r d k\epsilon_0} \tag{2}$$

A partir de 2 determino la diferencia de potencial entre las placas (que es V_1):

$$V_1 = \int_a^b \vec{E}.\vec{dr} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 dK} Ln(b/a) \tag{3}$$

Entonces la carga está dada por:

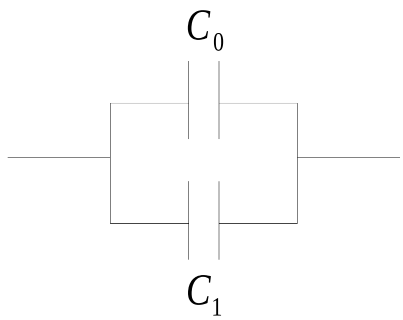
$$q = V_1 \frac{2\pi\epsilon_0 K d}{Ln(b/a)} \tag{4}$$

Por último, la capacitancia se calcula como:

$$C = \frac{q}{V_1} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 dK}{Ln(b/a)} \tag{5}$$

Parte b)

Cuando se pierde parte del dieléctrico, el capacitor se puede modelar como dos capacitores en paralelo. Como se observa en la figura **??** llamamos C_0 al capacitor donde no hay dieléctrico (parte de arriba), y C_1 al capacitor con dieléctrico K (parte de abajo).



Análogamente a la parte anterior, calculamos los capacitores C_0 y C_1:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0(d-h)}{Ln(b/a)} \tag{6}$$

$$C_1 = \frac{2\pi K\epsilon_0 h}{Ln(b/a)} \tag{7}$$

El capacitor equivalente al paralelo de ambos está dado por:

$$C_{eq} = \frac{2\pi\epsilon_0}{Ln(b/a)}(d-h+Kh) \tag{8}$$

Entonces la nueva diferencia de potencial V_2 entre las placas es:

$$V_2 = \frac{q\ Ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0(d-h+Kh)} \tag{9}$$

Parte c)

La densidad superficial de carga sobre la placa de menor radio difiere entre la zona donde hay dieléctrico σ_1 y donde no σ_0. Como los capacitores están en paralelo, la carga total (q) es la suma de las cargas de cada capacitor (q_1 y q_0 respectivamente).

$$\begin{cases} \sigma_0 = q_0/A_0 \ (h < z \leq d) \\ \sigma_1 = q_1/A_1 \ (0 \leq z \leq h) \end{cases} \tag{10}$$

De la definición de capacidad se deduce que $q = CV$, entonces usando 6, 7 y 9 se tiene:

$$q_0 = V_2 C_0 \Rightarrow q_0 = \frac{q\ Ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0(d-h+Kh)}.\frac{2\pi\epsilon_0(h-d)}{Ln(b/a)} \Rightarrow q_0 = q\frac{d-h}{d-h+Kh} \tag{11}$$

$$q_1 = V_2 C_1 \Rightarrow q_1 = \frac{q\ Ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0(d-h+Kh)}.\frac{2\pi\epsilon_0 Kh}{Ln(b/a)} \Rightarrow q_1 = q\frac{Kh}{d-h+Kh} \tag{12}$$

Por lo tanto las densidades superficiales de carga en la placa de menor radio son:

$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{q_0}{2\pi a(d-h)} \quad (h < z \leq d) \\ \sigma_1 = \frac{q_1}{2\pi a h} \quad (0 \leq z \leq h) \end{cases} \tag{13}$$

Otra forma de resolver lo anterior es aplicando ley de Gauss. Para C_0 se tiene:

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_0}{2\pi r(h-d)\epsilon_0} \tag{14}$$

Por otro lado la diferencia de potencial V_2 es:

$$V_2 = \int_a^b \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0(d-h)} Ln(b/a) \tag{15}$$

A su vez por lo hallado en la parte b) $V_2 = \frac{q\ Ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0(d-h+Kh)}$, entonces igualando con 15:

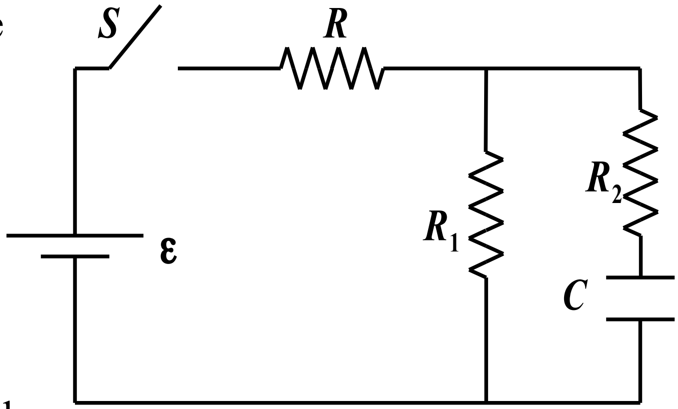
$$q_0 = q\frac{d-h}{d-h+Kh} \tag{16}$$

Para hallar q_1 se resuelve de manera análoga y luego de determinadas ambas cargas se puede calcular las densidades superficiales de carga como en 10.

Considere el circuito de la figura. (El capacitor está inicialmente descargado).

a) Hallar la intensidad de la corriente suministrada por la batería inmediatamente después de cerrado el interruptor S.

Después de que ha pasado un tiempo muy largo, determinar:



b) La intensidad de la corriente suministrada por la batería.
c) La energía almacenada en el capacitor.

Si posteriormente se abre el interruptor S:

d) Determinar la intensidad de la corriente a través de R1 y la carga en el condensador en función del tiempo.
e) ¿Qué fracción de la energía acumulada en el capacitor se disipa en la resistencia R2?

a) En el instante inicial el capacitor actúa como un cable, la intensidad de la corriente suministrada por la batería en el instante inicial entonces se puede hallar utilizando la ley de Ohm y sumando en paralelo R1 y R2:

$$I(0)=\frac{\varepsilon}{R+\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}$$

b) Luego de un tiempo muy largo, el capacitor está totalmente cargado, la corriente entonces circula únicamente a través de R y R1:

$$I(\infty)=\frac{\varepsilon}{(R+R_1)}$$

c) Utilizando la siguiente relación:

$$\varepsilon-R\,I=R_2 I_2+\frac{Q_2}{C}$$

Y evaluando en un tiempo muy largo (I2 es cero e I ya fue hallada):

$$\varepsilon-R\frac{\varepsilon}{(R+R_1)}=\frac{Q_2(\infty)}{C}$$

$$\rightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{1+R/R_1}\right)=\frac{Q_2(\infty)}{C}$$

La energía almacenada en el capacitor después de un tiempo muy largo:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q_2(\infty)^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{C\varepsilon^2}{\left(1+\frac{R}{R_1}\right)^2}$$

Método alternativo:

a) b) c) Aplicando ley de nodos y mallas:

$$\varepsilon - R(I_1+I_2) - R_2 I_2 - \frac{Q_2}{C} = 0$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene una ecuación diferencial para Q2:

$$\varepsilon - \underbrace{\left(R\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)+R_2\right)}_{a} I_2 - \underbrace{\left(\frac{R}{R_1}+1\right)\frac{1}{C}}_{b} Q_2 = 0$$

Con solución:

$$Q_2(t) = \frac{C\varepsilon}{\left(1+\frac{R}{R_1}\right)}\left(1-e^{-\frac{b}{a}t}\right)$$

La corriente I2 se obtiene derivando esta solución, y la corriente I1, utilizando la segunda ecuación.

Sumando I1 y I2 se obtiene la corriente suministrada por la fuente. Sus valores en tiempo igual a cero e infinito son respectivamente:

$$I(0)=I_1(0)+I_2(0)=\frac{\varepsilon}{R+\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}$$

$$I(\infty)=\frac{\varepsilon}{(R+R_1)}$$

La energía almacenada en el capacitor después de un tiempo muy largo:

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q_2(\infty)^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{C\varepsilon^2}{\left(1+\frac{R}{R_1}\right)^2}$$

d) Al abrir el interruptor el circuito resultante es un RC simple, con resistencia igual a R1+R2, la carga inicial está dada por $Q_2(\infty)$ de la parte anterior.

$$Q(t)=Q(0)e^{\frac{-t}{(R_1+R_2)C}}=\frac{C\varepsilon}{\left(1+\frac{R}{R_1}\right)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

$$I(t)=-\frac{\varepsilon}{(R_1+R_2)\left(1+\frac{R}{R_1}\right)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

e) La energía disipada por ambas resistencias es igual a la energía almacenada en el capacitor, hallada en la parte c)

$$U_{dis}=\int_0^{\infty}(R_1+R_2)I^2\,dt$$

$$U_{dis}=\int_0^{\infty}(R_1+R_2)\frac{\varepsilon^2}{(R_1+R_2)^2\left(1+\frac{R}{R_1}\right)^2}e^{-\frac{t}{2(R_1+R_2)C}}\,dt$$

$$U_{dis}=\frac{C\,\varepsilon^2}{2\left(1+\frac{R}{R_1}\right)^2}$$

Por otro lado, la energía disipada por cada resistencia:

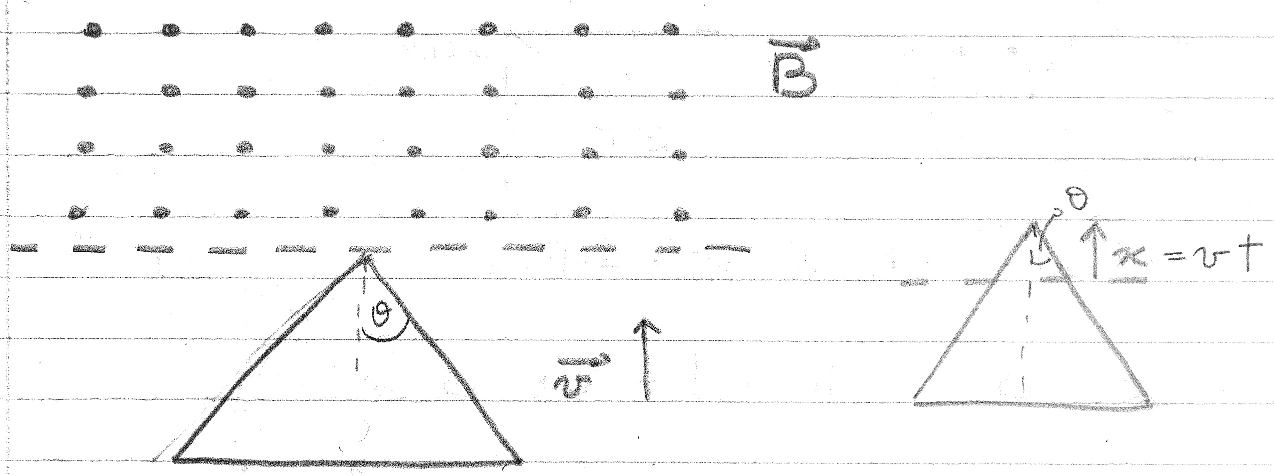
$$U_1=\int_0^{\infty}R_1 I^2\,dt$$

$$U_2=\int_0^{\infty}R_2 I^2\,dt$$

La fracción de energía almacenada en el capacitor que se disipa en R2:

$$Frac_{R2}=\frac{U_2}{U_{dis}}=\frac{R_2}{(R_1+R_2)}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3



a) $\text{área} = x^2 \, tg\,\theta$ $\qquad \underset{\text{flujo}}{\phi} = B x^2 tg\,\theta = B v^2 t^2 tg\,\theta$

b) $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi}{dt} = -2Bv^2 t \; tg\,\theta$

$i = \dfrac{2Bv^2 t \; tg\,\theta \; A}{3\rho L}$ $\rightarrow$ la intensidad se opone al aumento del flujo por lo tanto el sentido es horario

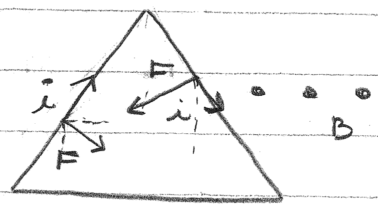
c) $P = R i^2 = \dfrac{3\rho L}{A}\left(\dfrac{4B^2 v^4 t^2 \, tg^2\theta \, A^2}{9\rho^2 L^2}\right)$

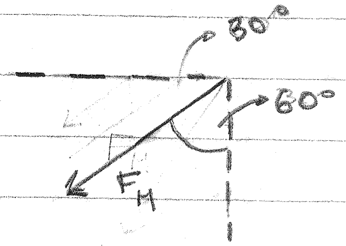
$\dfrac{4B^2 v^4 t^2 \, tg^2\theta \, A}{3\rho L}$

d) $P_{disipada} = P_{externa} = F_{ext}\, v$

$|F_{ext}| = \dfrac{4B^2 v^3 t^2 \, tg^2\theta \, A}{3\rho L}$

otra forma





$\vec{F}_{M\,TOTAL} = -\vec{F}_{ext}$ $\qquad 2F_M \cos(60°) = -F_{ext}$

$|F_M| = \dfrac{x\, i\, B}{\cos(30°)}$ $\qquad |F_{ext}| = 2 x\, i\, B \left(\dfrac{\cos(60°)}{\cos(30°)}\right)$ $= tg(30°) = tg(\theta)$

$$= 2(vt)B\left(\frac{2Bv^2t\; tg^2\theta A}{3\rho L}\right)$$

$$= \frac{4B^2 v^3 t^3\; tg^2\theta' A}{3\rho L}$$