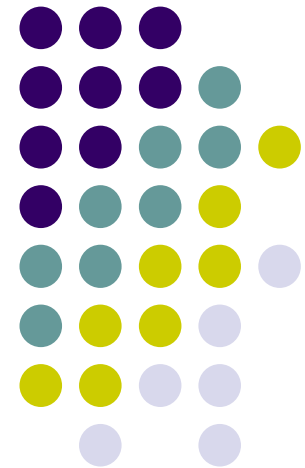


# INDUCTANCIA

---



# Inductancia

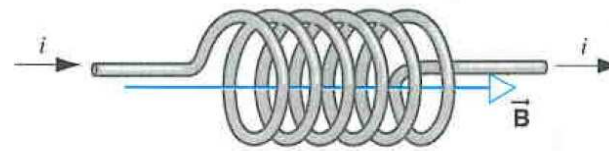
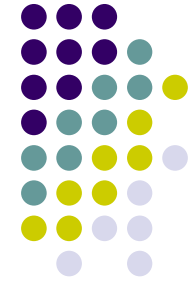


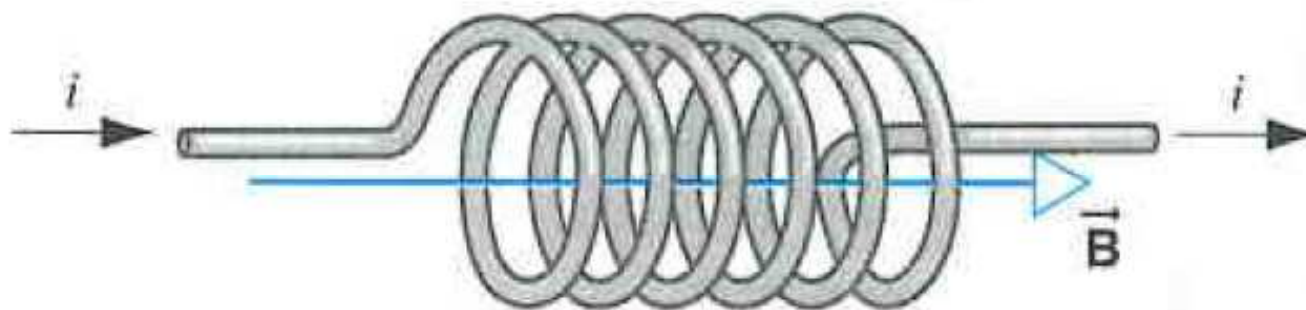
FIGURA 36-1. Inductor arbitrario, representado como un solenoide. La corriente  $i$  crea un campo magnético  $\vec{B}$ .



- El **inductor** es un elemento de un circuito que guarda energía en el campo magnético que rodea a sus alambres portadores de corriente.
- Del mismo modo que un capacitor guarda dicha energía en el campo eléctrico formado entre sus placas cargadas.
- El inductor se caracteriza por su **inductancia**, la cual depende de la forma de dicho inductor.



# Inductancia



**FIGURA 36-1.** Inductor arbitrario, representado como un solenoide. La corriente  $i$  crea un campo magnético  $\vec{B}$ .

**Inductancia L:**

$$\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}$$




# Inductancia

We used a coil and the solenoid assumption to introduce the inductance. But the definition

$$L \equiv -\frac{E_L}{dI/dt}$$

holds for all types of inductance, including a straight wire. **Any conductor has capacitance and inductance.**

An inductor is usually made of a coil to make a large inductance (more loops = more flux). The circuit symbol is 

The self-induced emf through this inductor under a changing current  $I$  is given by:

$$E_L = -L \frac{dI}{dt}$$



# Unidades de la inductancia

- The SI unit for inductance is the **henry (H)**

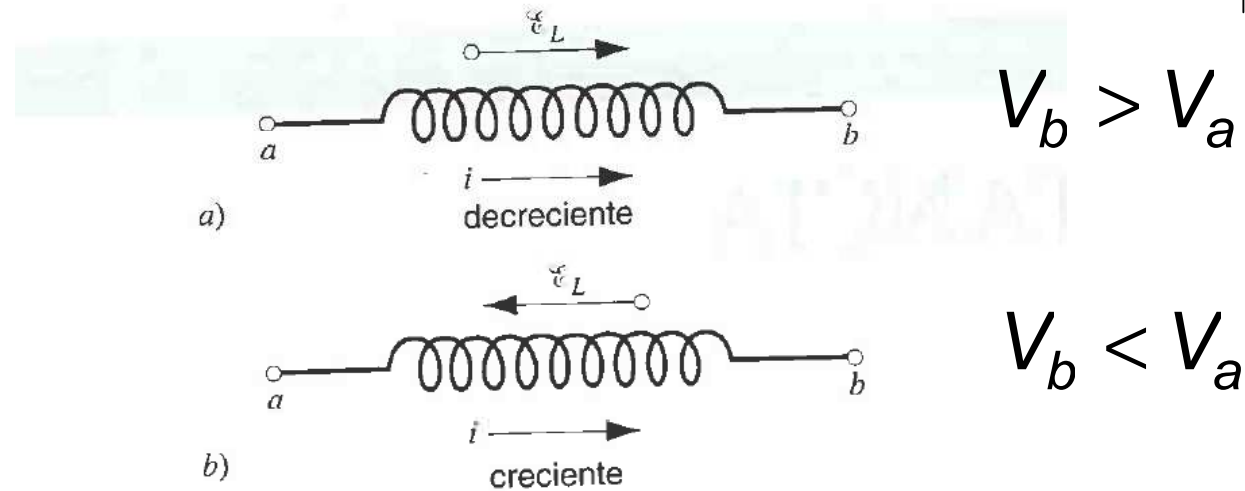
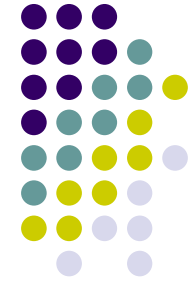
$$1\text{H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

- Named for Joseph Henry:
  - 1797 – 1878
  - American physicist
  - First director of the Smithsonian
  - Improved design of electromagnet
  - Constructed one of the first motors
  - Discovered self-inductance



© Thomson Higher Education

# Inductancia



**FIGURA 36-2.** a) Una corriente *decreciente* induce en el inductor una fuerza electromotriz que se opone a la disminución de esta corriente. b) Una corriente *creciente* induce en el inductor una fuerza electromotriz que se opone al incremento.

$$V_b - V_a = -L \frac{di}{dt}$$

# Cálculo de la inductancia



$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

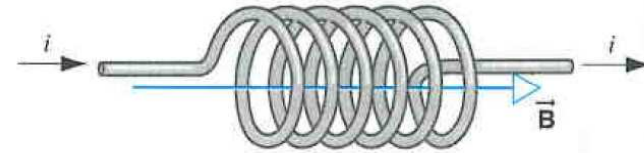


FIGURA 36-1. Inductor arbitrario, representado como un solenoide. La corriente  $i$  crea un campo magnético  $\vec{B}$ .

$N\Phi_B$  conexiones de flujo

Por ser  $\Phi_B$  proporcional a la corriente  $i$ , la razón de dicha ecuación **no depende** de  $i$  y, por consiguiente, la inductancia (como la capacitancia) depende sólo de la forma del dispositivo.

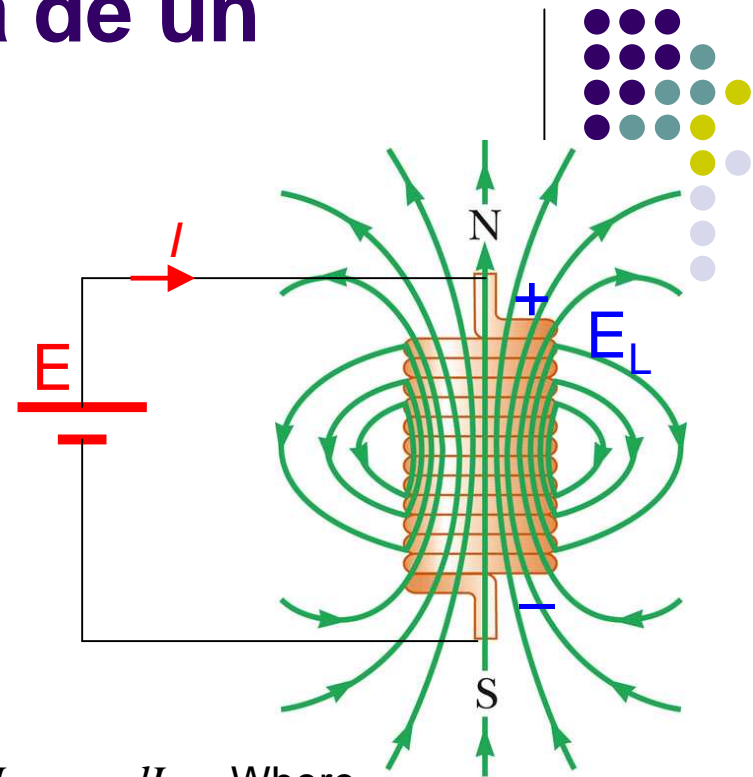
# Cálculo de la inductancia de un solenoide

When a current flows through a coil, there is magnetic field established. If we take the solenoid assumption for the coil:  $B = \mu_0 nI$

When this magnetic field flux changes, it induces an emf,  $E_L$ , called self-induction:

$$E_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(NAB)}{dt} = -\frac{d(NA\mu_0 nI)}{dt} = -\mu_0 n^2 V \frac{dI}{dt} \equiv -L \frac{dI}{dt}$$

or:  $E_L \equiv -L \frac{dI}{dt}$  For a solenoid:  $L = \mu_0 n^2 V$



Where  
 $n$ : # of turns per unit length.  
 $N$ : # of turns in length  $l$ .  
 $A$ : cross section area  
 $V$ : Volume for length  $l$ .

This defines the inductance  $L$ , which is a constant related only to the coil.

The self-induced emf  $\mathcal{E}_L$  is generated by (changing) current in the coil.

According to Lenz's Law, the emf generated inside this coil is always opposing the change of the current which is delivered by the original emf  $\mathcal{E}$ .



# La inductancia de un toroide



Recordemos...

# Magnetic Field of a Toroid

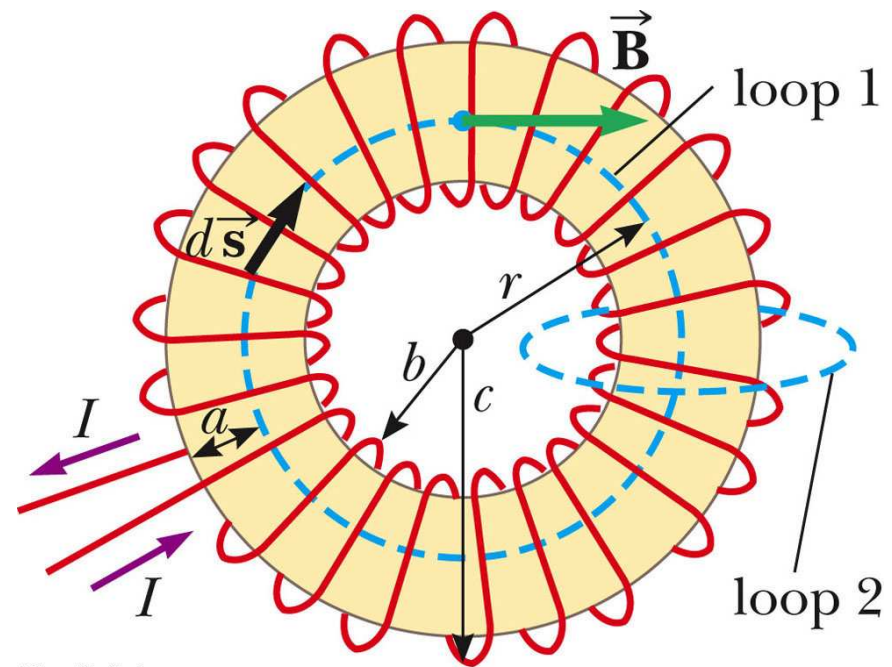


- The toroid has  $N$  turns of wire
- Find the field at a point at distance  $r$  from the center of the toroid (loop 1)

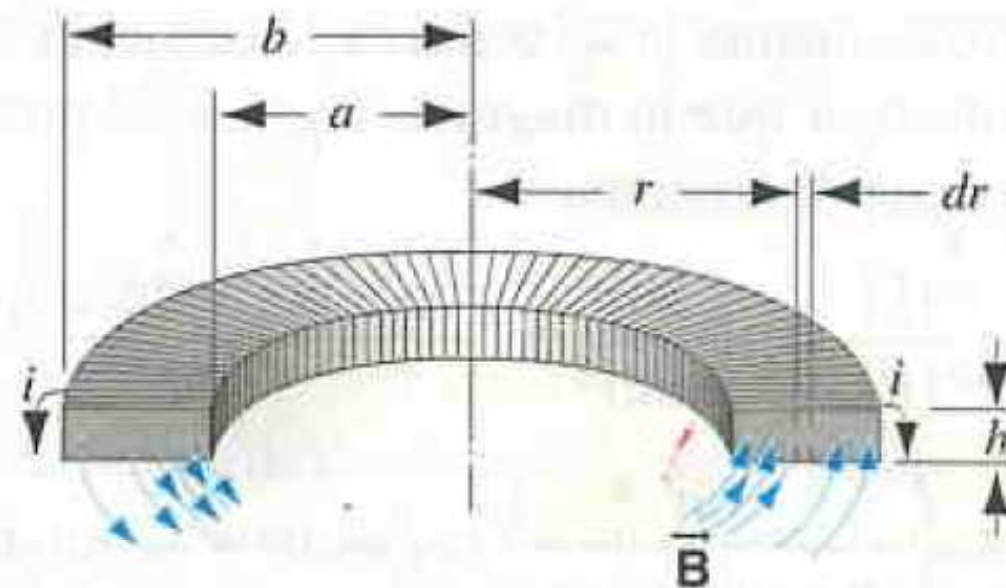
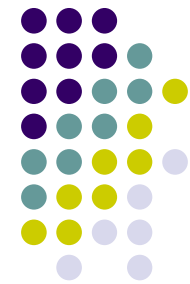
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B(2\pi r) = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

- There is no field outside the coil (see loop 2)



# La inductancia de un toroide



**FIGURA 36-3.** Sección transversal de un toroide; ésta muestra la corriente que pasa a través de los devanados y el campo magnético en el interior.

# Inductores con materiales magnéticos



Recordemos...

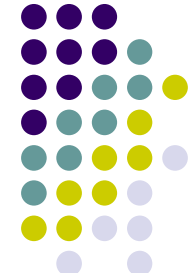
# Magnetización



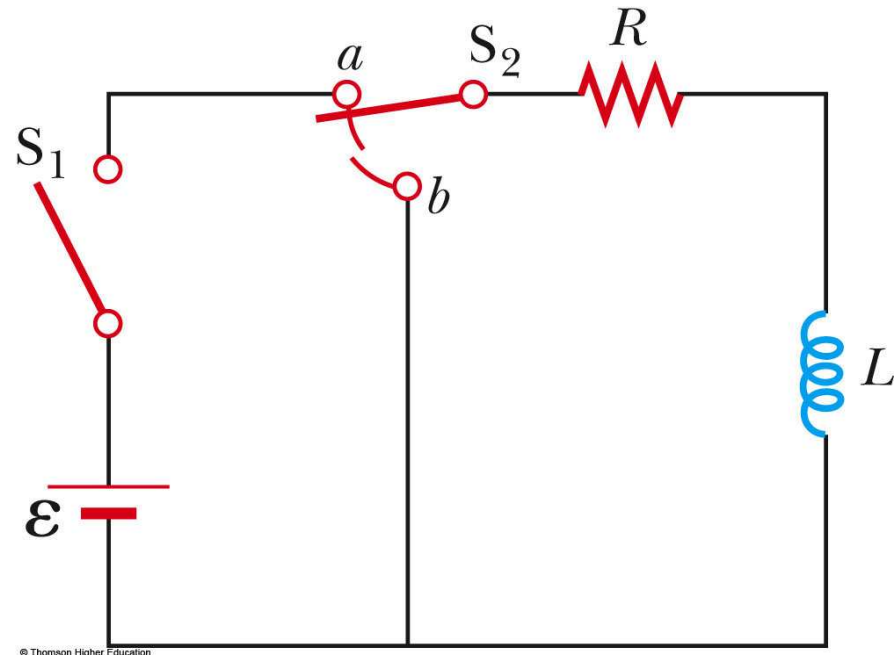
- La permeabilidad de la mayor parte de los materiales comunes (excepto los ferromagnéticos) tiene valores cercanos a 1.
- Con respecto a otros materiales que no son ferromagnéticos, la permeabilidad puede depender de propiedades como la temperatura y la densidad del material, pero no del campo  $\mathbf{B}_0$ .
- Para los ferromagnéticos  $\kappa_m$  depende del campo aplicado  $\mathbf{B}_0$ .

$$\vec{\mathbf{B}} = \kappa_m \vec{\mathbf{B}}_0$$

# Put inductor $L$ to use: *the RL Circuit*



- An  $RL$  circuit contains a resistor  $R$  and an inductor  $L$ .
- There are two cases as in a  $RC$  circuit (charging and discharging) but in an  $RL$  circuit one changes current, not electric charge.
- Current increases:
  - When  $S_2$  is connected to position  $a$  and when switch  $S_1$  is closed (at time  $t = 0$ ), the current through  $R$  and  $L$  begins to increase
- Current decreases:
  - When  $S_2$  is connected to position  $b$ .



© Thomson Higher Education

# RL Circuit

- Applying Kirchhoff's loop rule to the circuit in the clockwise direction gives

$$\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Here because the current is increasing, the induced emf has a direction that should oppose this increase.

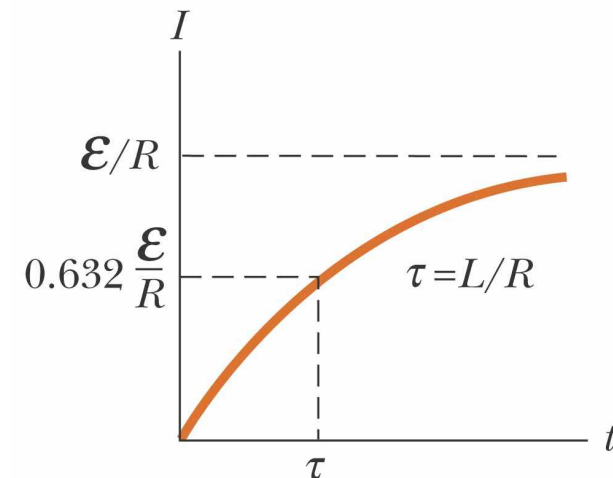
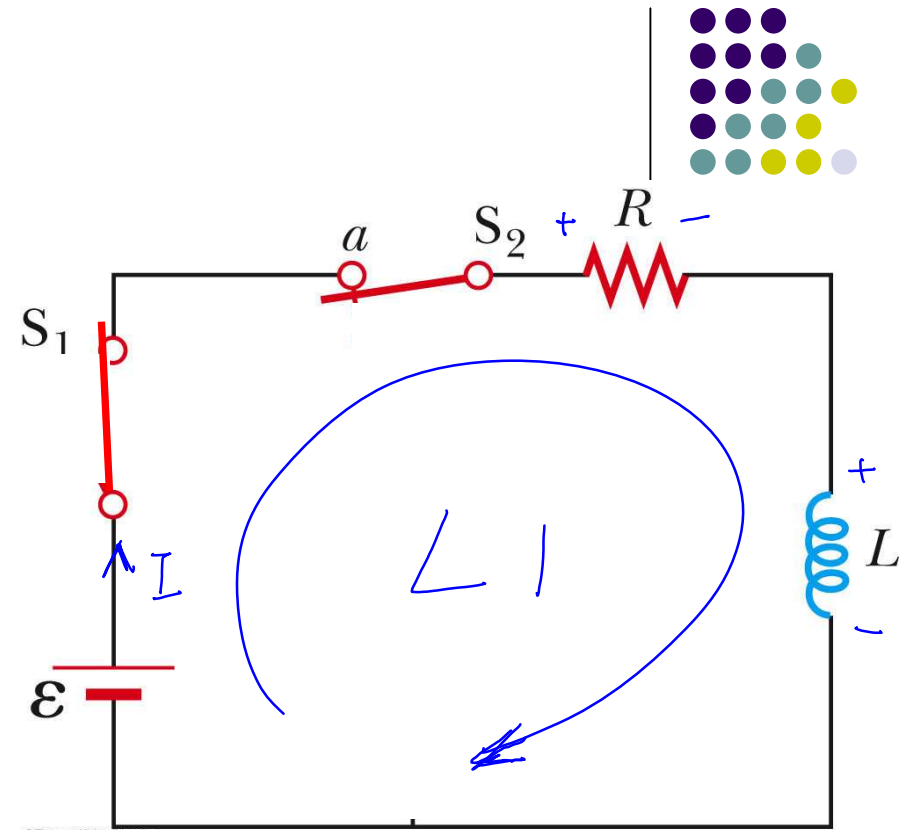
- Solve for the current  $I$ , with initial condition that  $I(t=0) = 0$ , we find

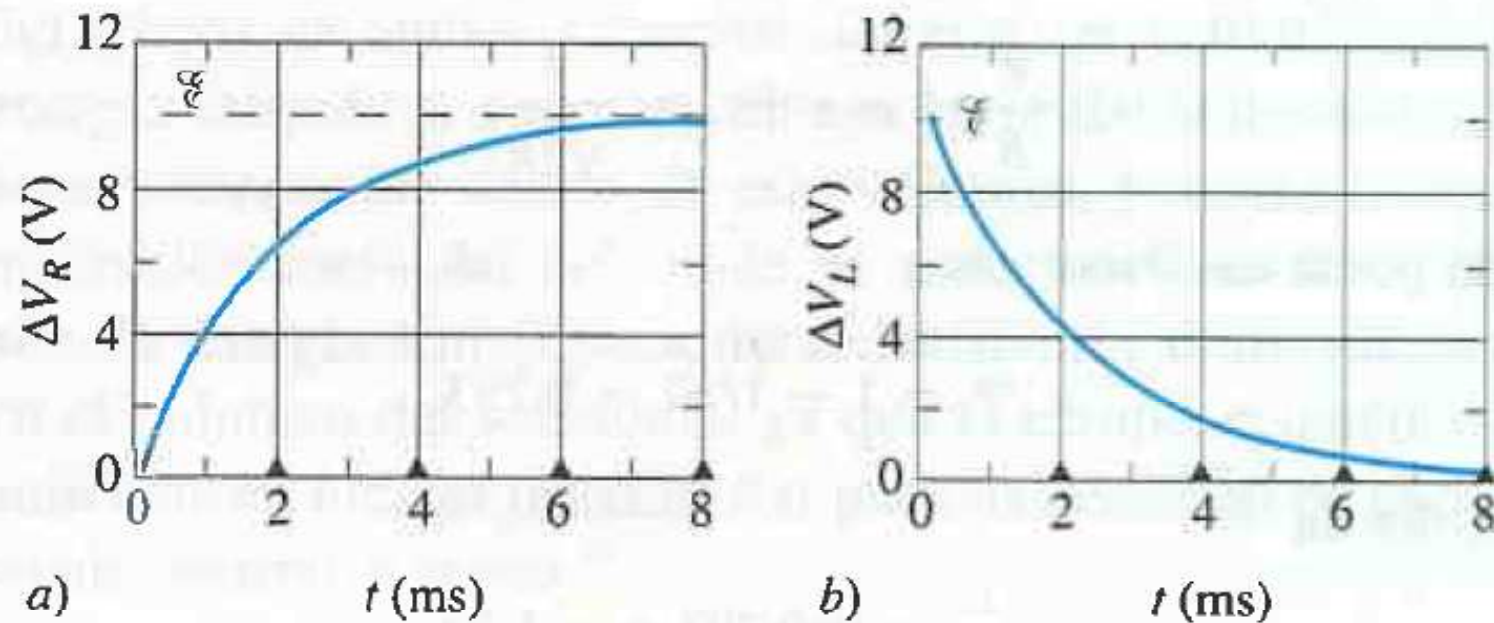
$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \equiv \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

- Where the time constant is defined as:

$$\tau \equiv \frac{L}{R}$$

*Constante de tiempo inductiva*





**FIGURA 36-5.** Variación de a)  $\Delta V_R$  con el tiempo, la diferencia de potencial en el resistor dentro del circuito de la figura 36-4 y b)  $\Delta V_L$ , la diferencia de potencial en el inductor de ese circuito. Las curvas se trazan con  $R = 2000 \Omega$ ,  $L = 4.0 \text{ H}$  y  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ . La constante inductiva de tiempo  $\tau_L$  es 2 ms; los intervalos sucesivos iguales a  $\tau_L$  están marcados por triángulos en el eje horizontal.



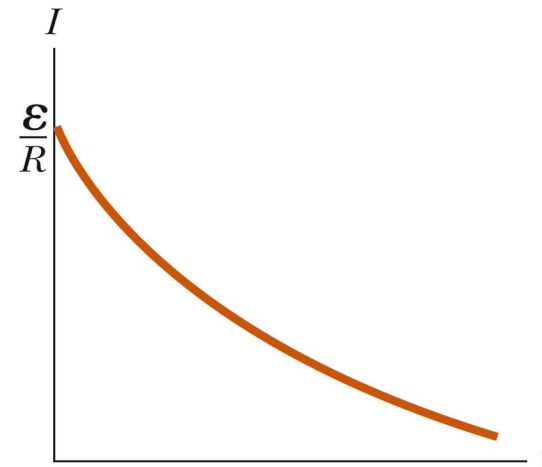
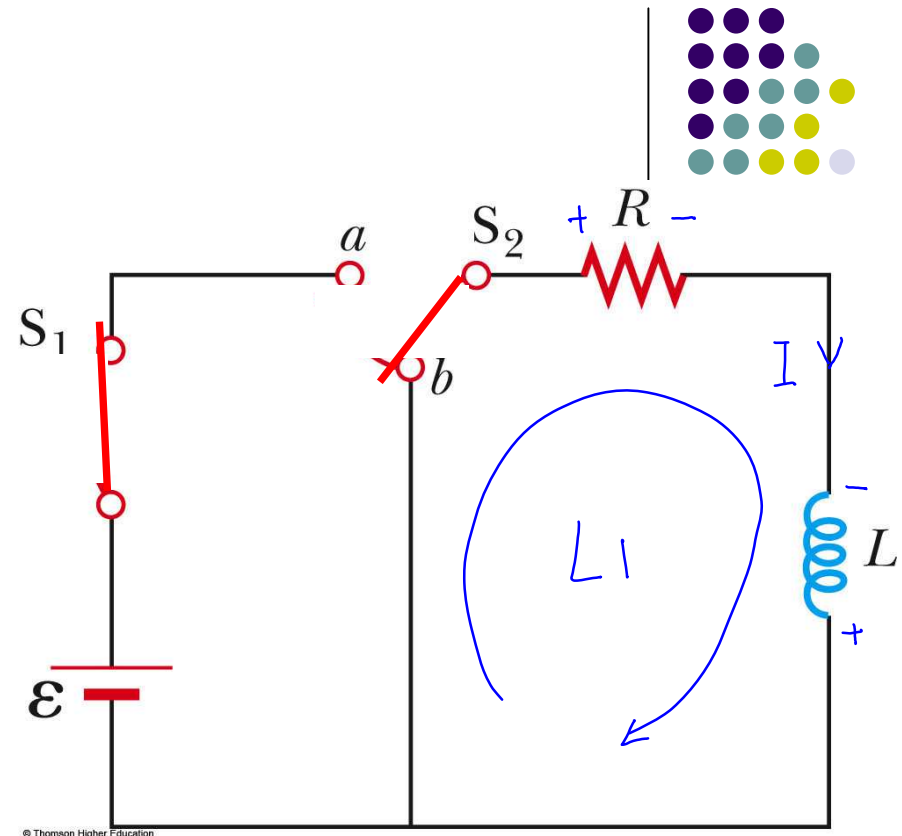
# RL Circuit

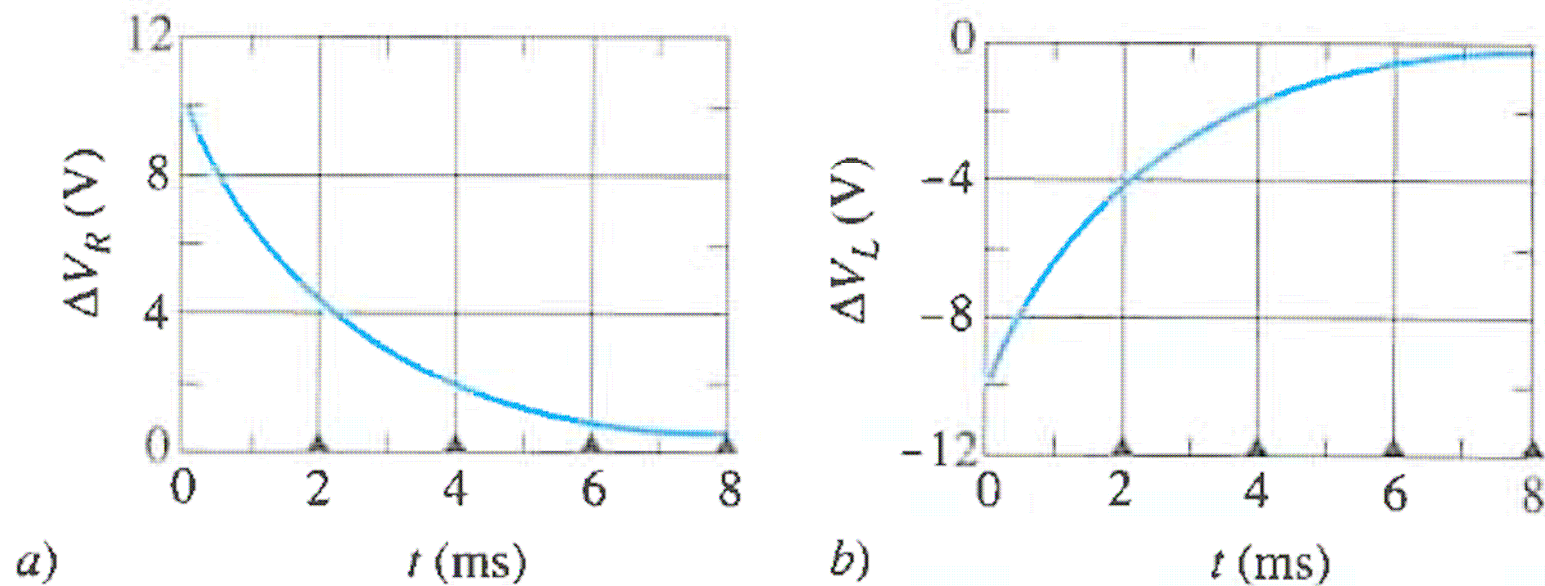
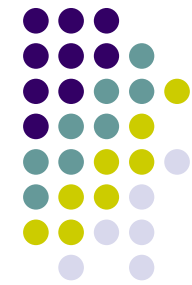
- When switch  $S_2$  is moved to position  $b$ , the original current disappears. The self-induced emf will try to prevent that change, and this determines the emf direction (Lenz Law).

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

- Solve for the current  $I$ , with initial condition that  $I(t=0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$  we find

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \equiv \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$





**FIGURA 36-6.** Lo mismo que la figura 36-5 en el circuito de la figura 36-4, con el interruptor puesto en  $b$  luego de haber permanecido en  $a$  largo tiempo.

# Energy stored in an inductor



The increasing current  $I$  from the battery supplies power not only to the resistor, but also to the inductor. From Kirchhoff's loop rule, we have

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Multiply both sides with  $I$ :

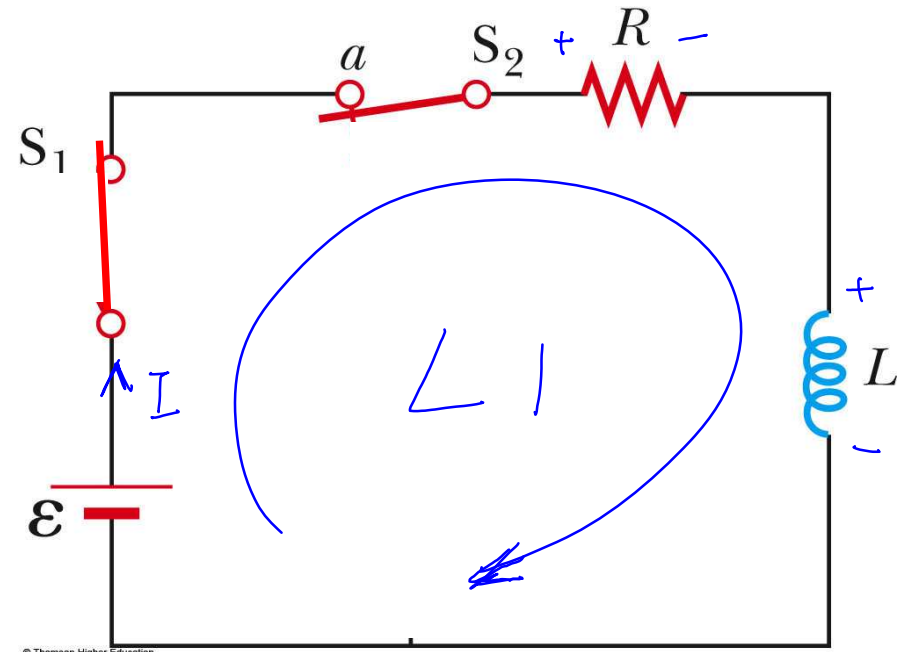
$$\varepsilon I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

This equation reads: power<sub>battery</sub> = power<sub>R</sub> + power<sub>L</sub>

So we have the rate of energy increase in the inductor as:

$$\frac{dU_L}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Solve for  $U_L$ : 
$$U_L = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$



© Thomson Higher Education

# Stored energy type and the Energy Density of a Magnetic Field



- Given  $U_L = \frac{1}{2} L I^2$  and assume (for simplicity) a solenoid with  $L = \mu_0 n^2 V$

$$U_L = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V$$

So the energy stored in the solenoid volume  $V$  is magnetic ( $B$ ) energy.

- Since  $V$  is the volume of the solenoid, the magnetic energy density,  $u_B$  is

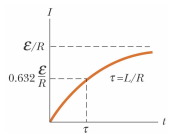
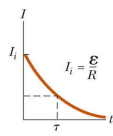
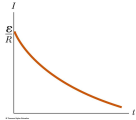
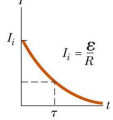
$$u_B \equiv \frac{U_L}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

And the energy density is proportional to  $B^2$ .

- This applies to any region in which a magnetic field exists (not just the solenoid)

# RL and RC circuits comparison



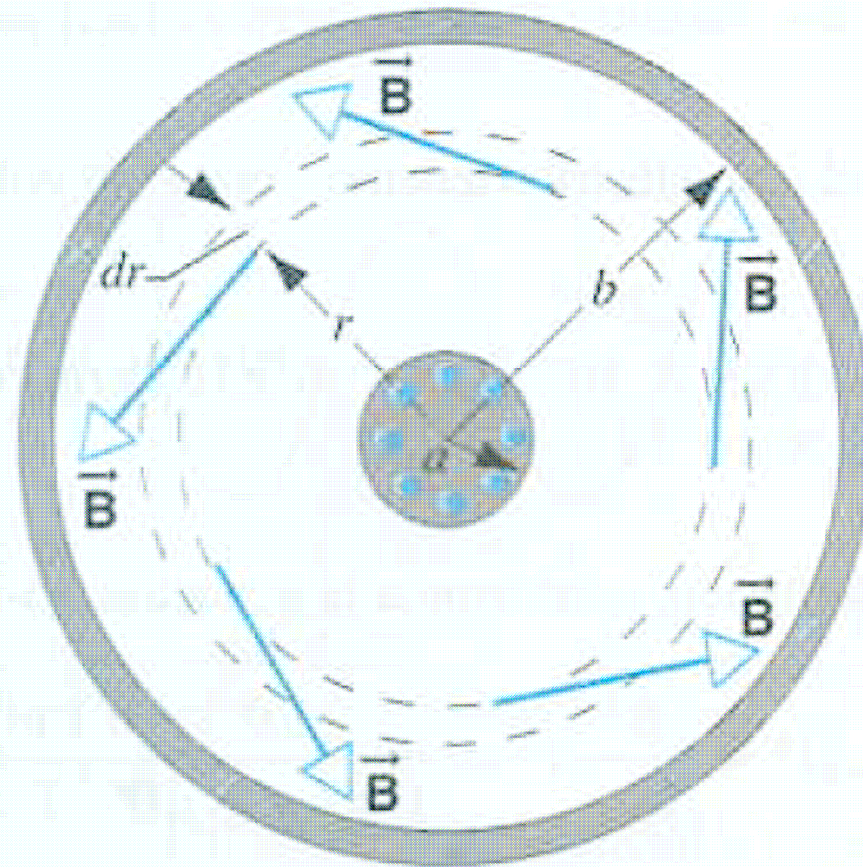
	RL	RC
Charging	$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$ 	$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ 
Discharging	$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$ 	$I(t) = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ 
Energy	$U_L = \frac{1}{2} LI^2$	$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$

	Magnetic field	Electric field
Energy density	$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$	$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

# Energy Storage Summary

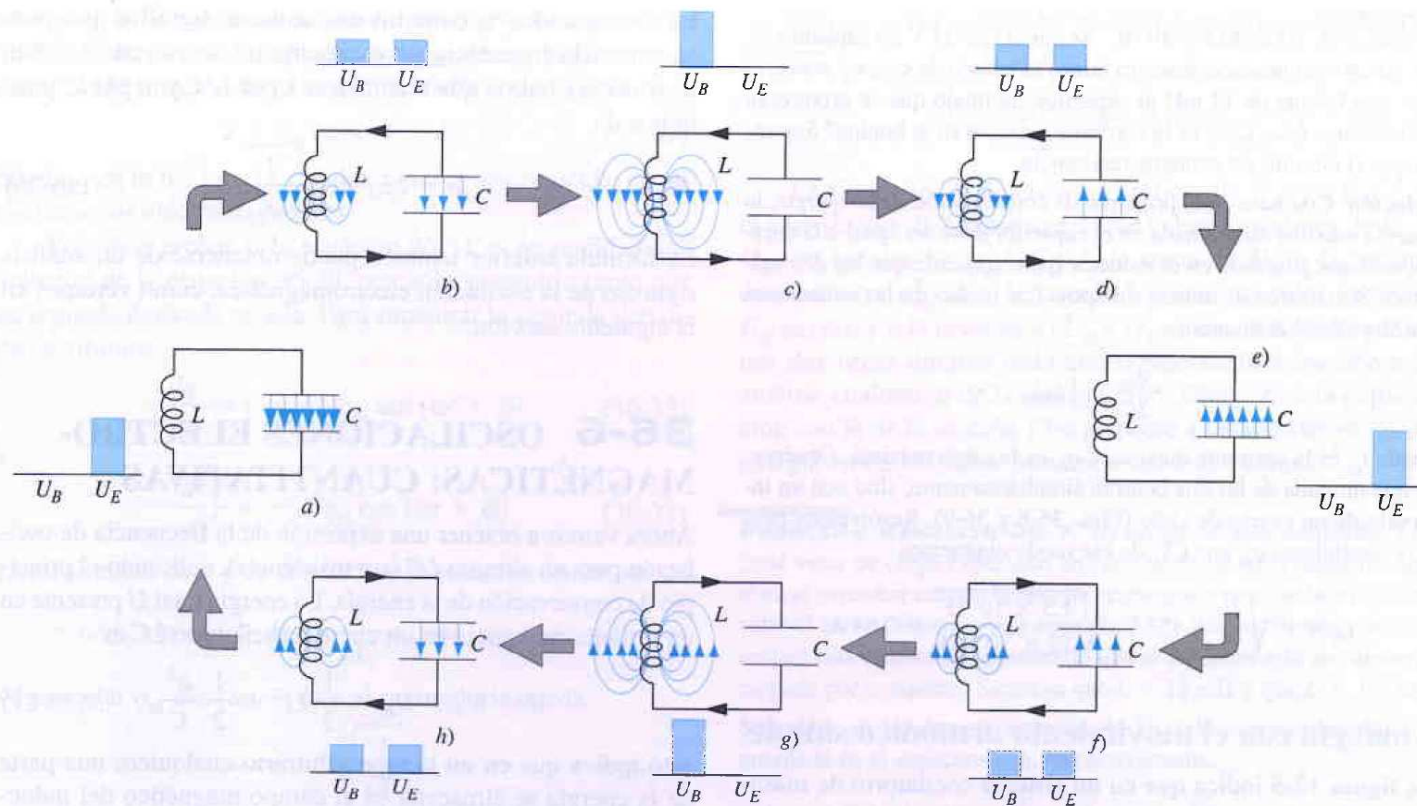


- Inductor and capacitor store energy through different mechanisms
  - Charged capacitor
    - Stores energy in the electric field
  - When current flows through an inductor
    - Stores energy in the magnetic field
- A resistor does not store energy
  - Energy delivered is transformed into thermo energy



**FIGURA 36-7.** Problema resuelto 36-6. Sección transversal de un cable coaxial, que transporta corrientes estacionarias, iguales, pero opuestas en sus conductores interno y externo. Las líneas de  $\vec{B}$  forman círculos en la región comprendida entre los conductores.

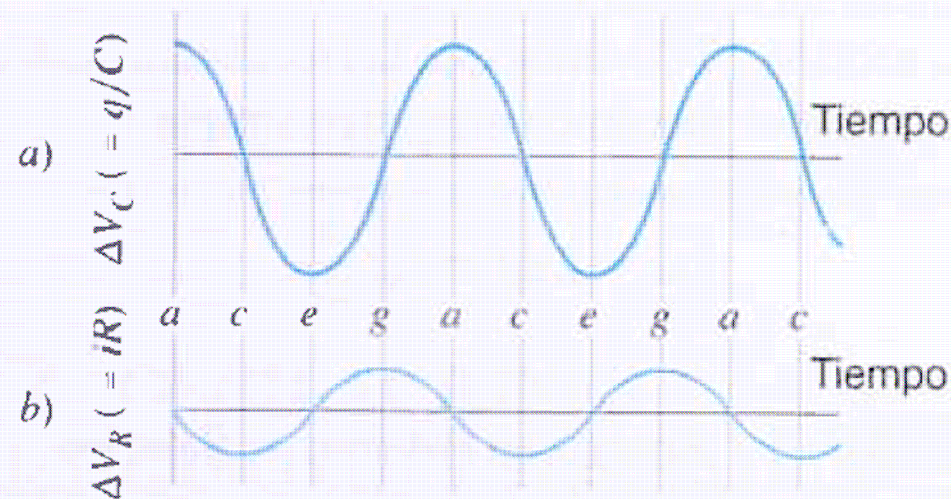
# Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas



**FIGURA 36-8.** Ocho etapas de un ciclo de oscilación en un circuito  $LC$  sin resistencia. Las gráficas de barras muestran las energías magnética y eléctrica almacenadas.



# Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas



**FIGURA 36-9.** *a)* Diferencia de potencial a través del capacitor en el circuito de la figura 36-8 en función del tiempo. Esta magnitud es proporcional a la carga del capacitor. *b)* Diferencia de potencial que pasa por un resistor pequeño introducido en el circuito de la figura 36-8. Esta magnitud es proporcional a la corriente. Las letras indican las etapas correspondientes de oscilación de la figura 36-8.

# Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas



- Analogía con el MAS
- $q \leftrightarrow x$
- $i \leftrightarrow v$
- $1/C \leftrightarrow k$
- $L \leftrightarrow m$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longleftrightarrow \quad \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

# Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas



**TABLA 36-1** Energía en sistemas oscilatorios

<i>Mecánicos</i>		<i>Electromagnéticos</i>	
Resorte	$U_s = \frac{1}{2} kx^2$	Capacitor	$U_E = \frac{1}{2} C^{-1} q^2$
Masa	$K = \frac{1}{2} mv^2$ $v = dx/dt$	Inductor	$U_B = \frac{1}{2} Li^2$ $i = dq/dt$

# Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas



$$U = U_B + U_E$$

$$U = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$U = cte \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = 0$$

# Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$q = q_m \cos(\omega t + \phi)$$

# Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas

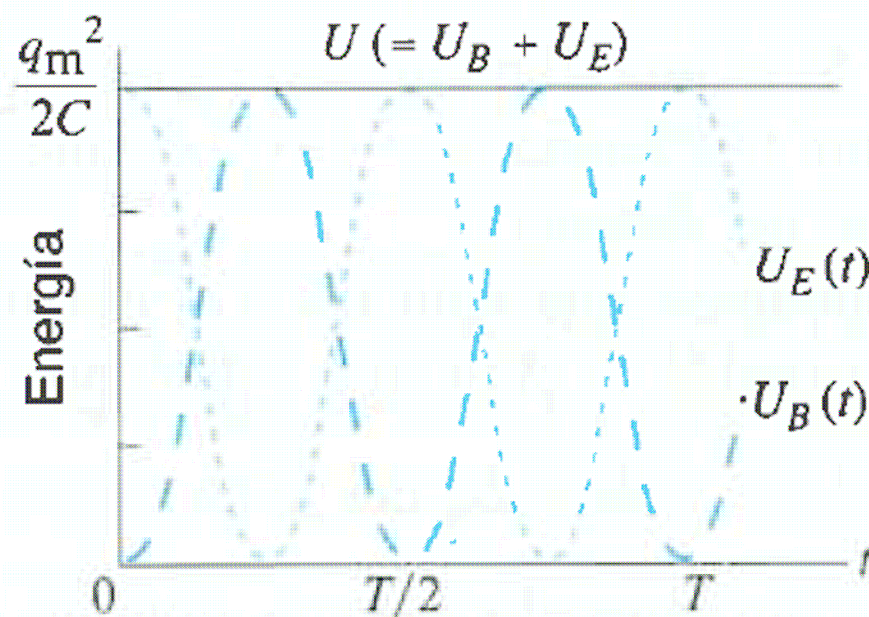


$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi)$$

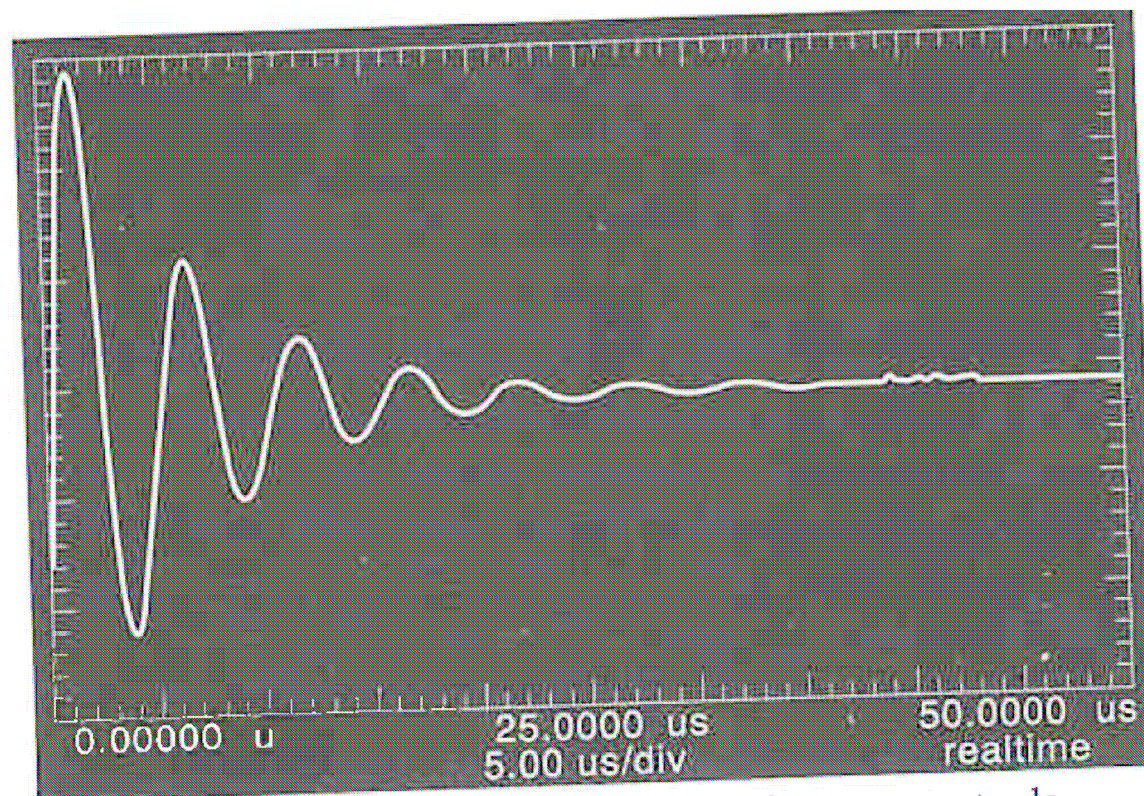
$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 q_m^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

Sustituyendo  $\omega$ :

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C} \text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

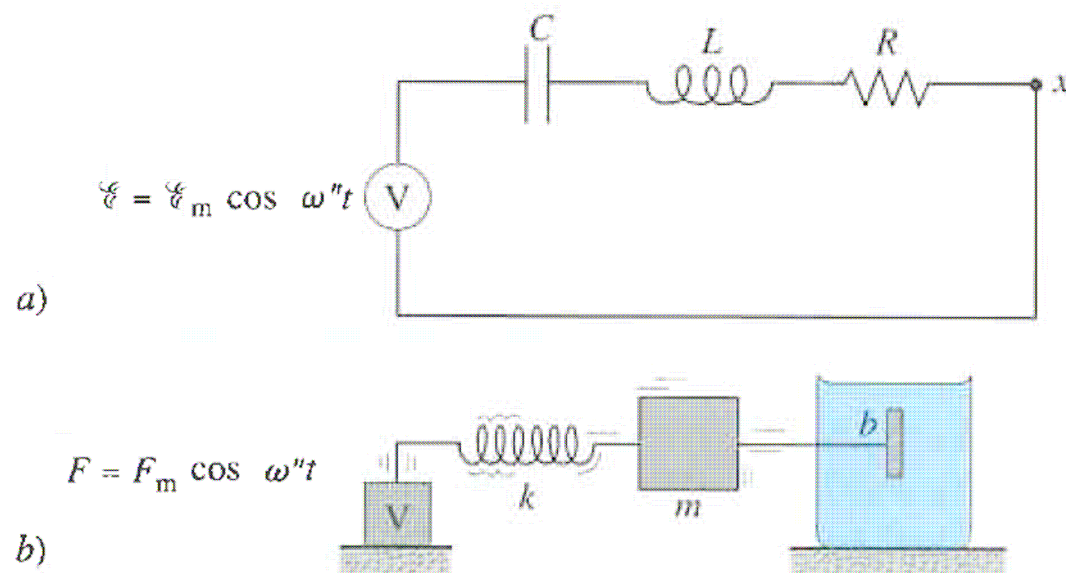


**FIGURA 36-10.** Energías magnética y eléctrica almacenadas y su suma en un circuito  $LC$  en función del tiempo.  $T (= 2\pi/\omega)$  es el periodo de oscilación.

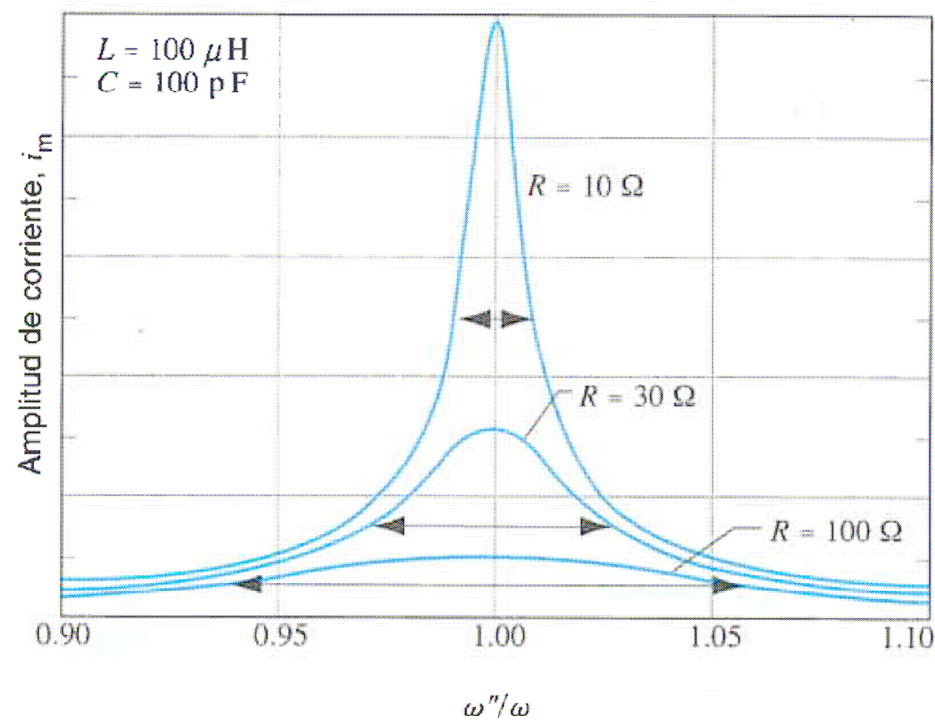


**FIGURA 36-11.** Trazo de un osciloscopio que muestra la oscilación de un circuito  $LC$  amortiguado. La amplitud de oscilación disminuye porque se disipa energía en la resistencia del circuito.





**FIGURA 36-12.** a) Las oscilaciones electromagnéticas de un circuito se mantienen a una frecuencia angular  $\omega''$ . b) Las oscilaciones mecánicas de un sistema mesa-resorte se mantienen a una frecuencia angular  $\omega''$ . Los elementos correspondientes de los dos sistemas se dibujan opuestos cada uno.



**FIGURA 36-13.** Curvas de resonancia para el circuito oscilatorio forzado de la fig. 36-12a. Las tres curvas corresponden a diferentes valores de la resistencia del circuito. Las flechas horizontales indican el ancho de la “agudeza” de cada resonancia.