Ley de Gauss

Ley de Gauss

- Hasta ahora todo lo que hemos hecho en electrostática se basa en la ley de Coulomb.
- A partir de esa ley hemos definido el campo eléctrico de una carga puntual.
- Al generalizar las distribuciones de cargas, que pueden considerarse como conjuntos de muchas cargas puntuales infinitesimales, pudimos determinar el campo eléctrico de varias distribuciones de cargas (línea, anillo, disco, etc.).
- La ley de Gauss proporciona otra manera de calcular los campos eléctricos.
- Cuanto hemos hecho hasta ahora aplicando la ley de C. pudimos haberlo realizado partiendo de la ley de Gauss.

Ley de Gauss

¿Por qué necesitamos la ley de Gauss si la ley de Coulomb es suficiente para calcular los campos eléctricos en cualquier arreglo de cargas?

- Ofrece una forma mucho más simple de calcularlos en situaciones con alto grado de simetría.
- La ley de Gauss es válida en el caso de cargas de movimiento rápido, mientras que la ley de C. se aplica sólo a las cargas que se hallan en reposo o que se desplazan con lentitud.
- La ley de C. puede obtenerse como caso especial de la de Gauss, por tanto esta última es más general que la primera.

El flujo de un campo vectorial

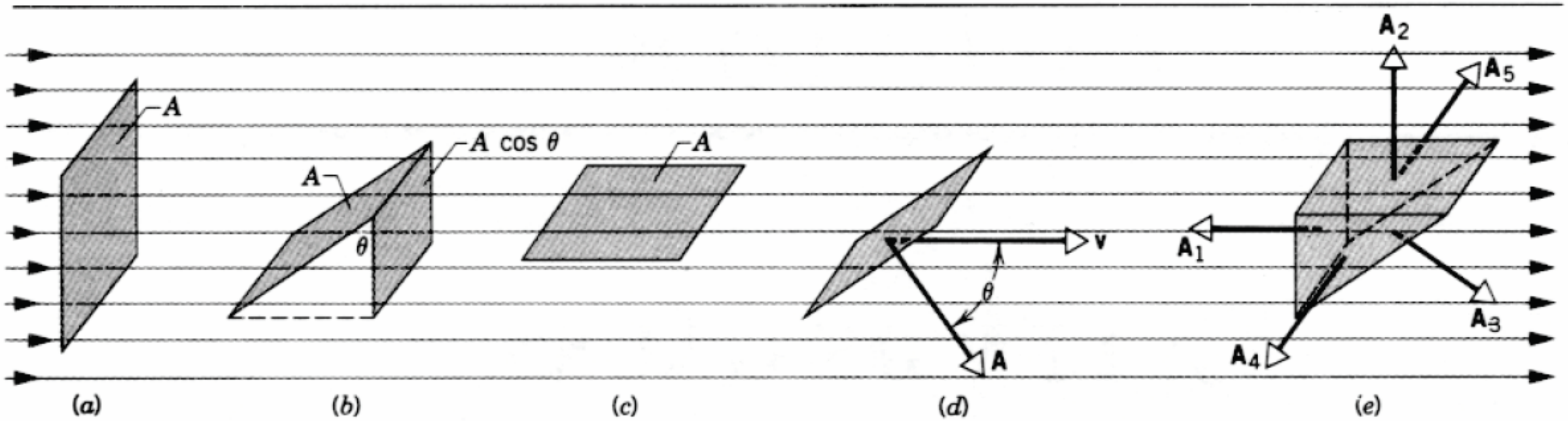


Figura 1 Una espira de alambre de área A está inmersa en una corriente que fluye, la cual representamos como un campo de velocidad. (a) La espira está en ángulo recto al flujo. (b) La espira ha girado en un ángulo θ; la proyección del área perpendicular al flujo es $A \cos \theta$. (c) Cuando $\theta = 90°$, ninguna de las líneas de la corriente pasan a través del plano de la espira. (d) El área de la espira está representada por un vector **A** perpendicular al plano de la espira. El ángulo entre **A** y la velocidad de flujo **v** es θ. (e) Superficie cerrada hecha de cinco superficies planas. El área **A** de cada superficie se representa por la normal hacia afuera.

Definimos el flujo Φ del campo de velocidad: $|\Phi| = vA$

Conviene considerar el flujo como una medida del ***número de líneas del campo que atraviesan la espira.***

El flujo de un campo vectorial

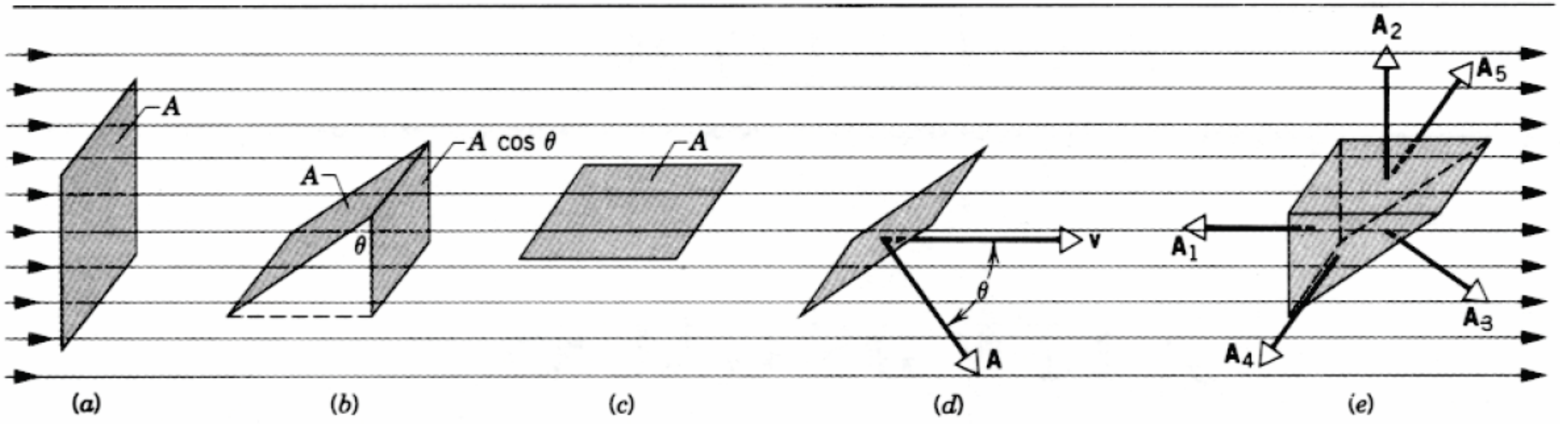


Figura 1 Una espira de alambre de área A está inmersa en una corriente que fluye, la cual representamos como un campo de velocidad. (a) La espira está en ángulo recto al flujo. (b) La espira ha girado en un ángulo θ; la proyección del área perpendicular al flujo es $A \cos \theta$. (c) Cuando $\theta = 90°$, ninguna de las líneas de la corriente pasan a través del plano de la espira. (d) El área de la espira está representada por un vector **A** perpendicular al plano de la espira. El ángulo entre **A** y la velocidad de flujo **v** es θ. (e) Superficie cerrada hecha de cinco superficies planas. El área **A** de cada superficie se representa por la normal hacia afuera.

Fig. 1 (b): El número de líneas de campo de velocidad que pasan por la espira es menor que en (a). El número de líneas de campo de velocidad que cruzan la espira inclinada de superficie A es igual al que atraviesa la espira más pequeña, de sup. Acosθ.

El flujo de un campo vectorial

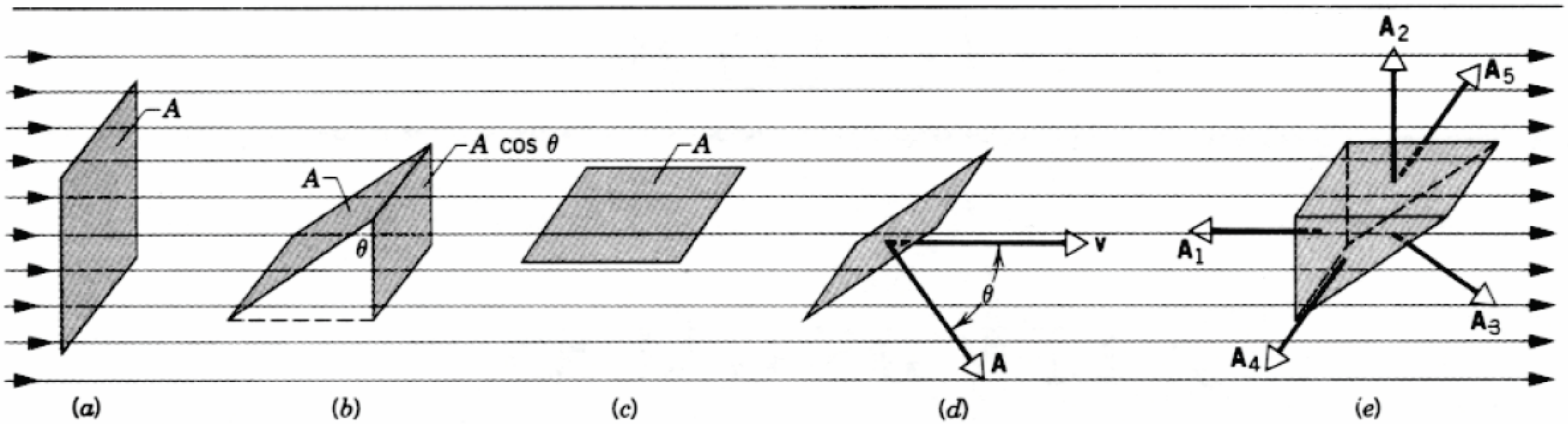


Figura 1 Una espira de alambre de área *A* está inmersa en una corriente que fluye, la cual representamos como un campo de velocidad. (*a*) La espira está en ángulo recto al flujo. (*b*) La espira ha girado en un ángulo θ; la proyección del área perpendicular al flujo es $A \cos \theta$. (*c*) Cuando $\theta = 90°$, ninguna de las líneas de la corriente pasan a través del plano de la espira. (*d*) El área de la espira está representada por un vector **A** perpendicular al plano de la espira. El ángulo entre **A** y la velocidad de flujo **v** es θ. (*e*) Superficie cerrada hecha de cinco superficies planas. El área **A** de cada superficie se representa por la normal hacia afuera.

$$\Phi = \vec{v} \bullet \vec{A}$$

El flujo de un campo vectorial

- Como veremos, la ley de Gauss se refiere al flujo neto que atraviesa una superficie *cerrada*.
- Podemos escribir el flujo de una superficie cerrada compuesta por varias superficies individuales:

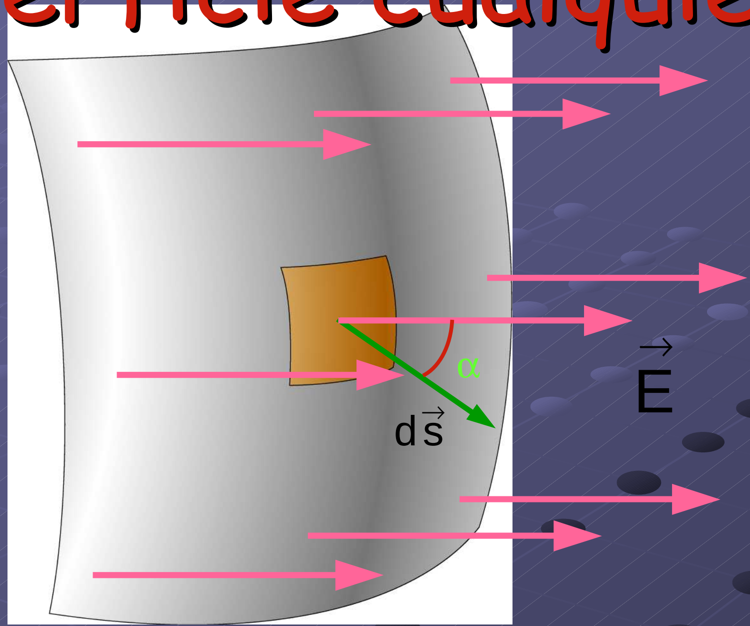
$$\boxed{\Phi = \sum \vec{v}.\vec{A}}$$

El flujo de un campo vectorial

- Es fácil generalizar los conceptos anteriores a un campo no uniforme y a superficies de forma y orientación arbitrarias.
- Cualquier superficie arbitraria puede dividirse en elementos infinitesimales de área dA, que son aproximadamente superficies planas.
- La dirección del vector d**A** sigue la de la normal hacia afuera de este elemento infinitesimal.
- El campo posee un valor **v** en el sitio del elemento.

$$\Phi = \int \vec{v} . d\vec{A}$$

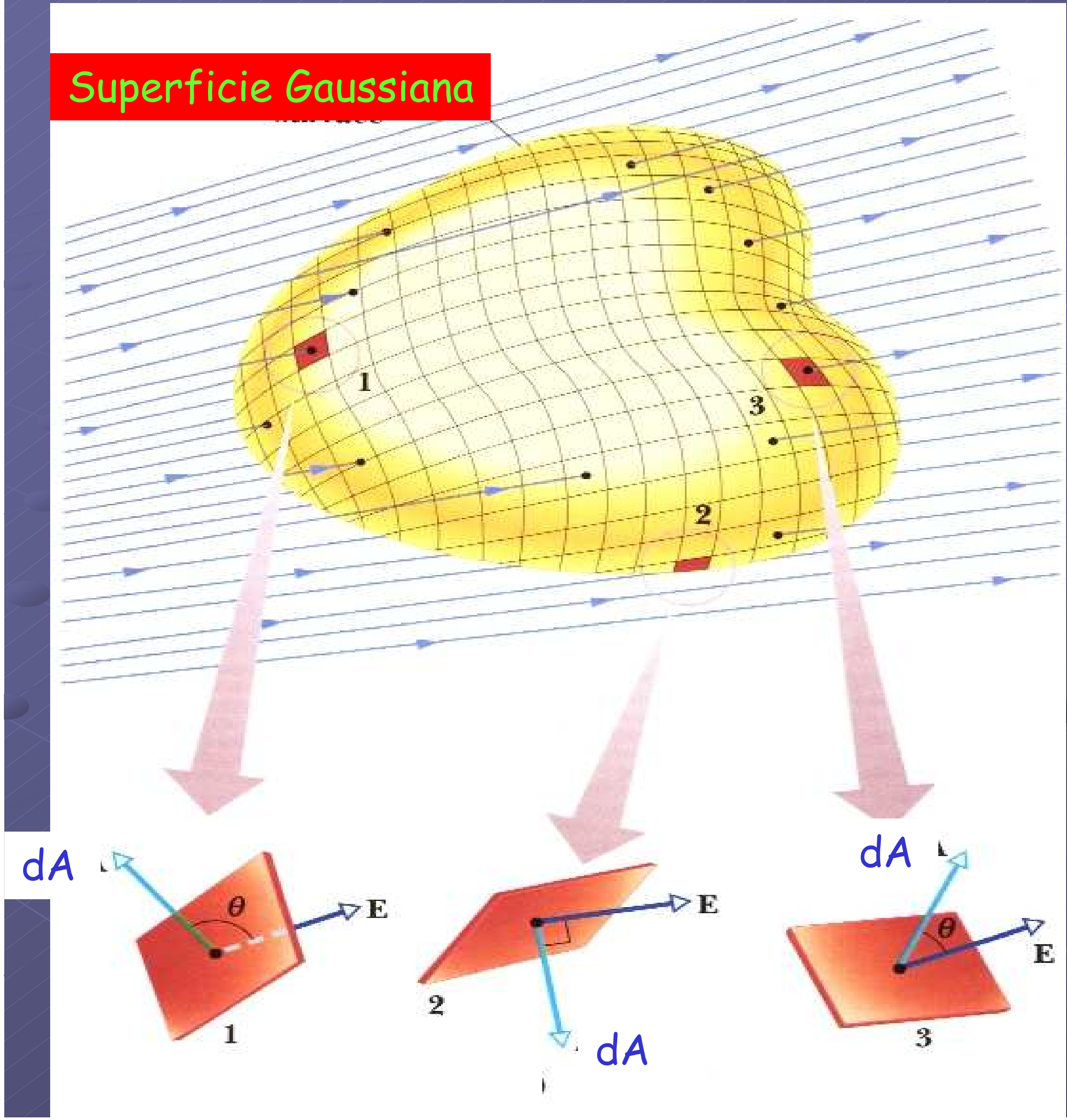
Flujo del campo eléctrico para una superficie cualquiera



- Dada una superficie cualquiera S, el flujo elemental $d\Phi$ a través de un elemento de superficie $d\vec{S}$ es $d\Phi = \vec{E}\,d\vec{S}$

- El flujo a través de toda la superficie es $\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E}\,d\vec{S}$

Flujo del vector campo eléctrico



Flujo infinitesimal
→E es constante en la superficie dA

$$d\Phi_E = \vec{E}.d\vec{A}$$

Flujo total
→Se debe sumar (= integrar) a toda la superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Unidades

$$\Phi = \left[\frac{N}{C} m^2\right]$$

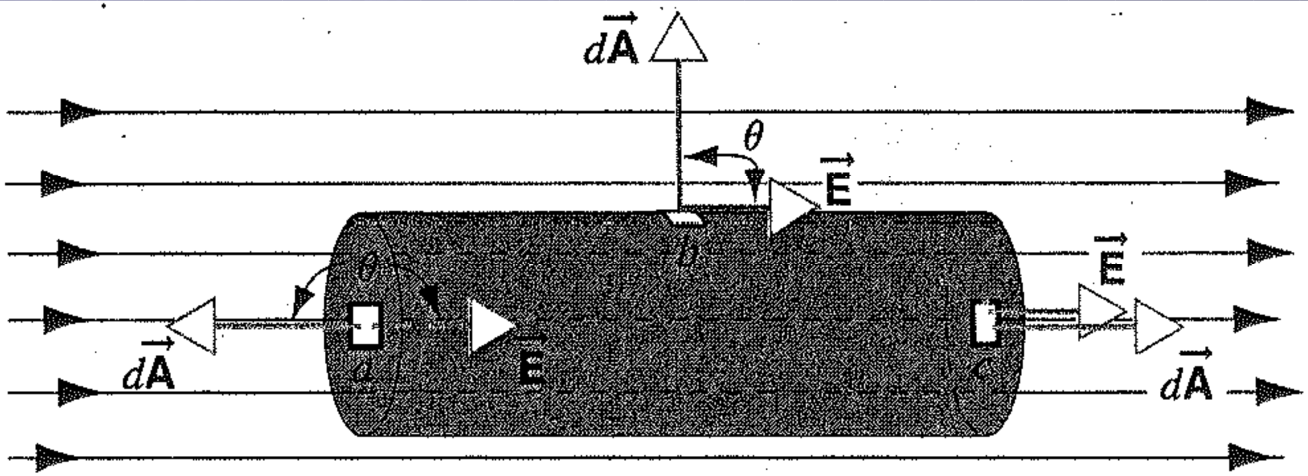


FIGURA 27-3. Problema resuelto 27-2. Un cilindro cerrado está inmerso en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ paralelo a su eje.

Ley de Gauss

- El flujo del vector campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada en su interior dividida por la permitividad del medio.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

  - La superficie gaussiana no es una superficie real (es matemática).
  - La ley de Gauss simplifica los cálculos de campo eléctrico en casos de gran simetría.

Ley de Gauss

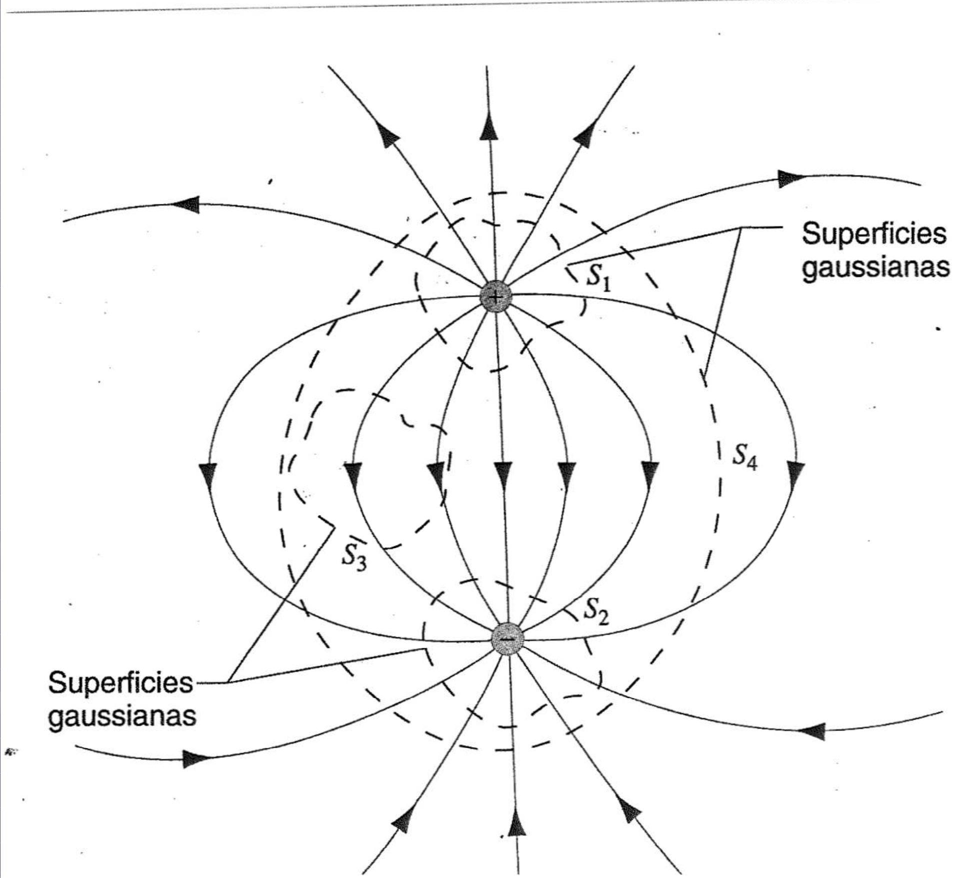


FIGURA 27-6. Dos cargas iguales y opuestas y las líneas que representan el campo eléctrico en su cercanía. Se muestran las secciones transversales de cuatro superficies gaussianas cerradas.

Ley de Gauss y ley de Coulomb

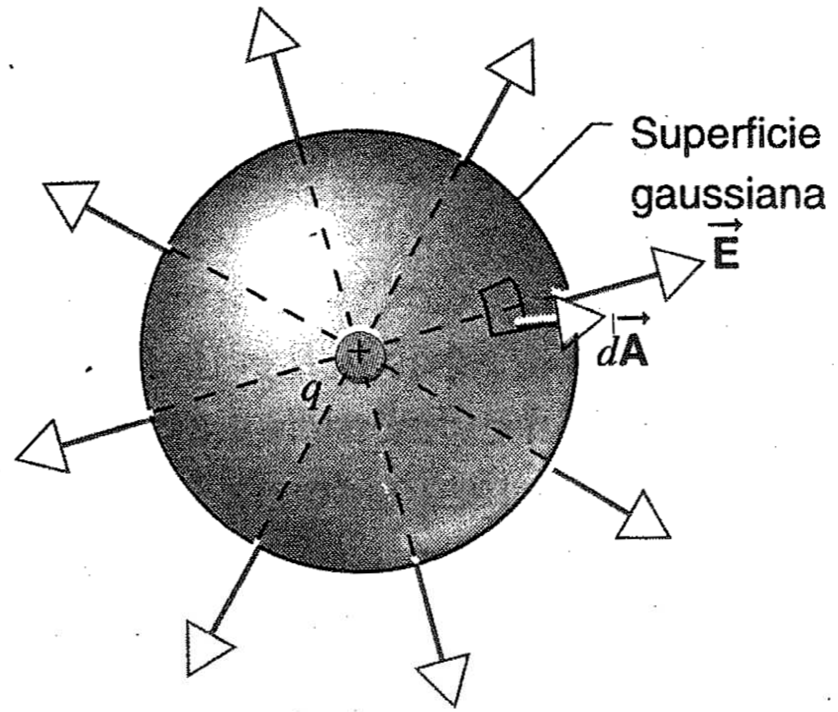
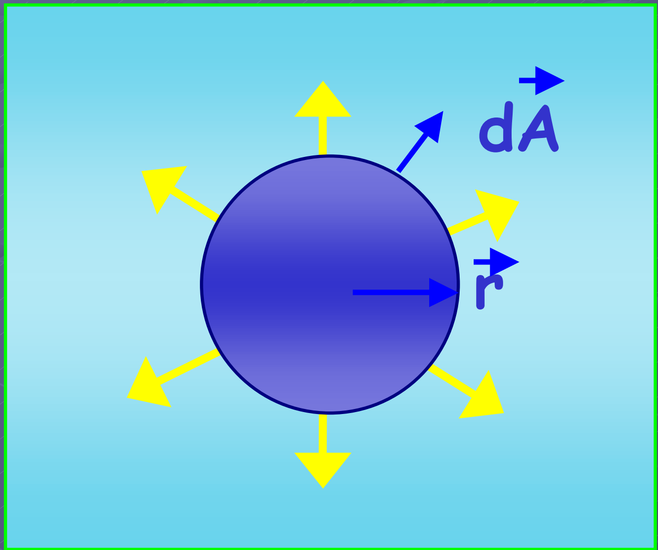


FIGURA 27-7. Superficie gaussiana esférica de radio r que rodea una carga puntual positiva q.

Cálculos con ley de Gauss

- Carga puntual→ Simetría esférica



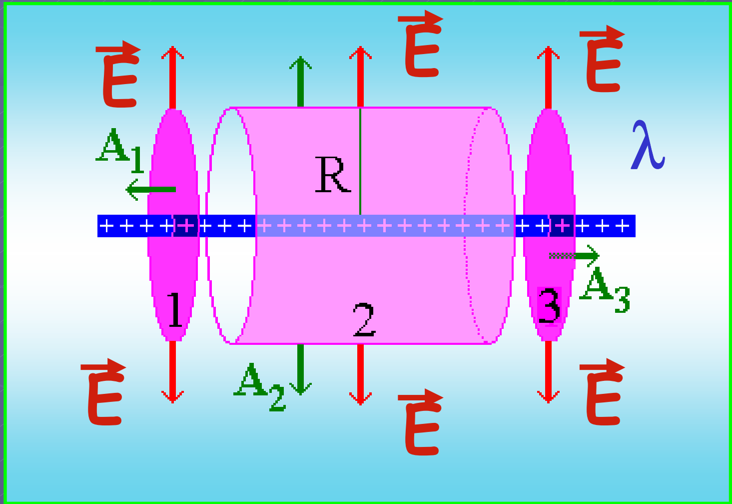
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)(4\pi r^2)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Cálculos con ley de Gauss

- Conductor infinito con densidad lineal de carga λ.

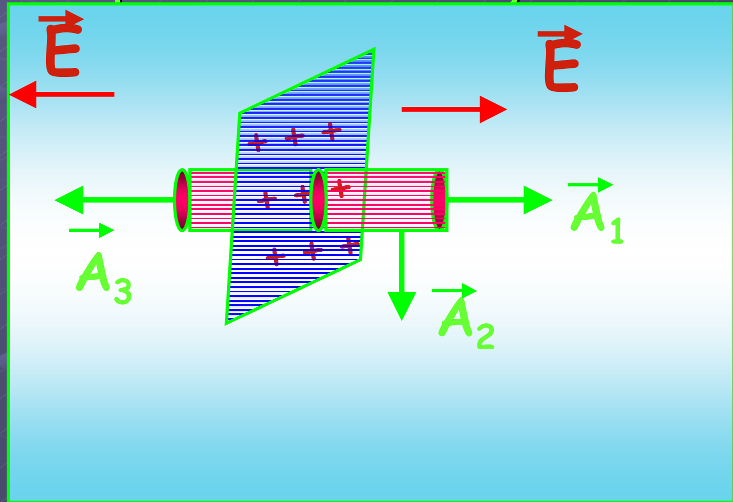


$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}_2 = E(2\pi R l)$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{r}$$

- Plano infinito con densidad superficial de carga σ.



$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}_1 + \vec{E}\cdot\vec{A}_3 = E(2A)$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\pm x) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

Cálculos con ley de Gauss

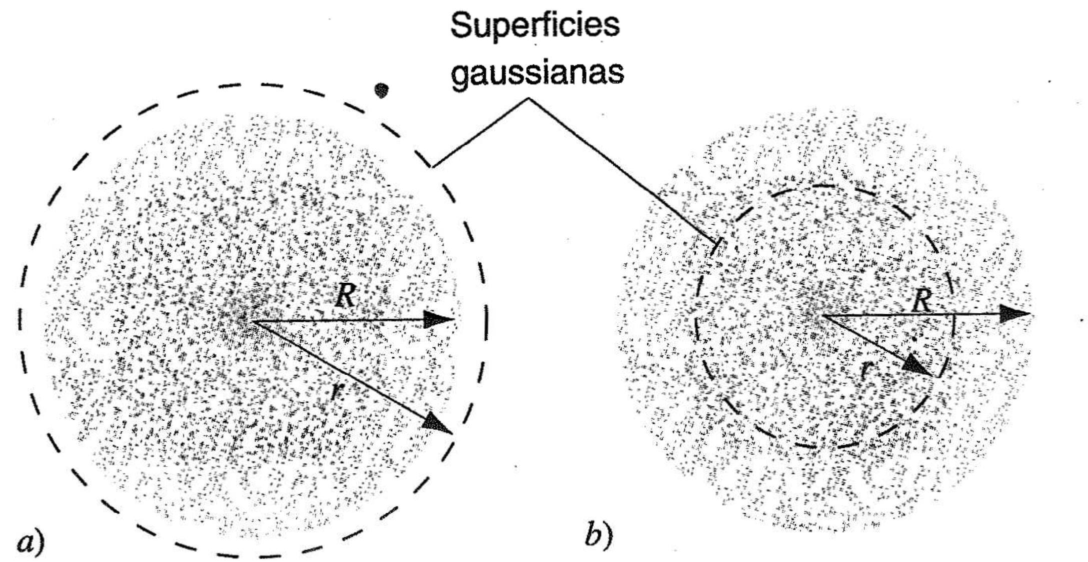


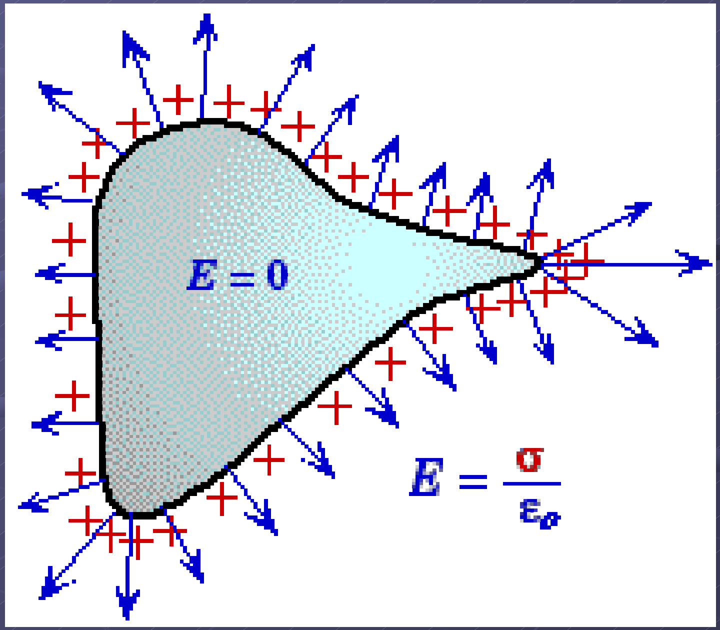
FIGURA 27-11. Sección transversal de una distribución de carga con simetría esférica, en que la densidad de carga volumétrica puede variar con r en este material supuestamente no conductor. Las superficies gaussianas esféricas cerradas se dibujaron *a*) afuera de la distribución y *b*) en su interior.

Conductores en equilibrio

- En un conductor existen cargas con libertad de movimiento.
- Una carga eléctrica es capaz de moverse al aplicar un campo.
- Si el campo $\vec{E} \neq 0$ se produce una redistribución de cargas en el interior hasta $\vec{E} = 0$ la situación de "equilibrio electrostático".

Carga y campo en un conductor en equilibrio electrostático

- El campo interior es nulo $\vec{E} = 0$ → Las cargas se sitúan en la superficie.



- Campo superficial
  - Componente normal

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

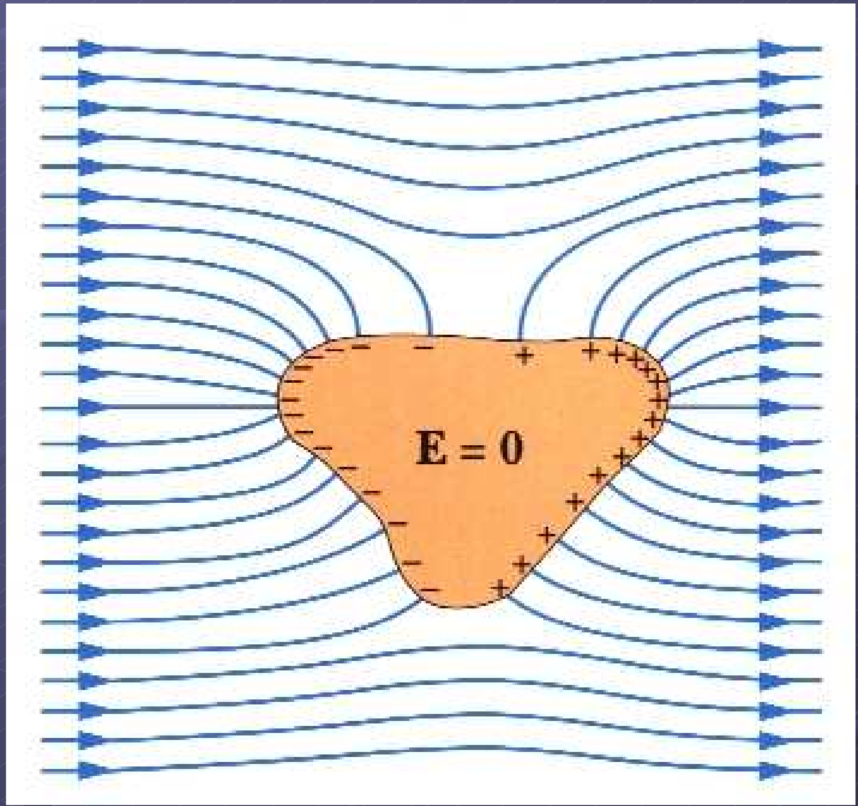
  - Componente tangencial

$$\boxed{E_t = 0}$$

Si no fuera nula existiría desplazamiento superficial de cargas

Conductor en un campo eléctrico

- El campo interior siempre es nulo.
- Deforma las líneas de campo exterior.
- Se produce una redistribución de carga en la superficie debido a la fuerza eléctrica.



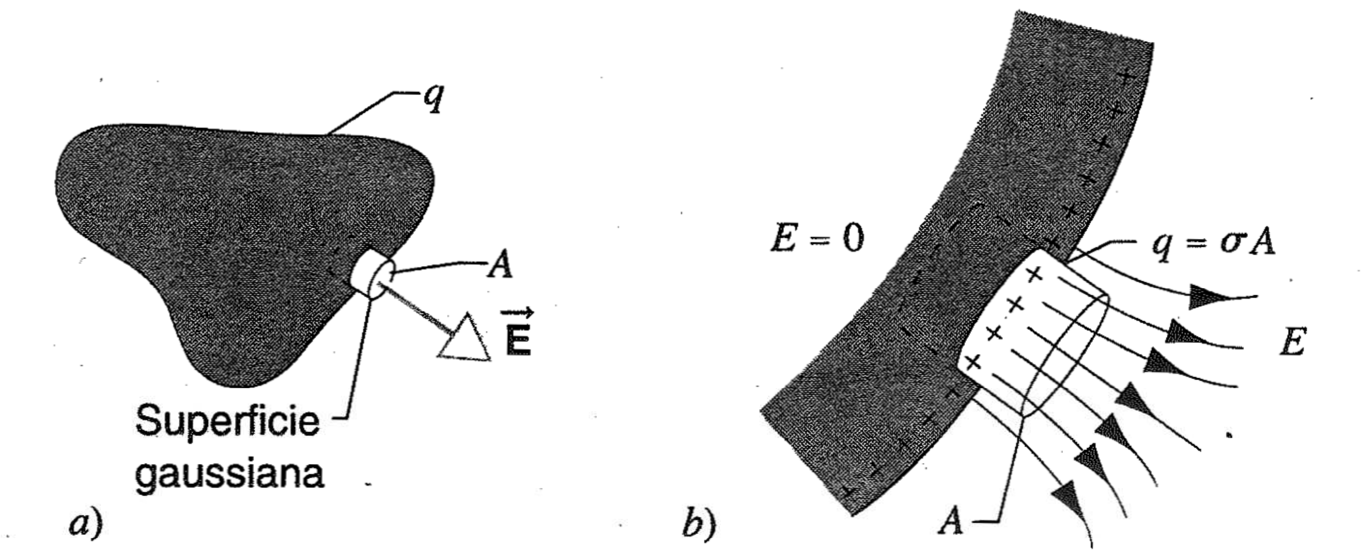


FIGURA 27-15. *a*) Una pequeña superficie gaussiana se colocó sobre la superficie de un conductor cargado. *b*) Vista ampliada de la superficie gaussiana que encierra una carga q igual a σA.

FIN