Cap. 3 - Ondas

Matías Fernández y Paulo Valente,
Instituto de Física, Facultad de Ingeniería.

26 de mayo de 2020

1. El fenómeno ondulatorio

Un importante tema de estudio asociado a los medios continuos son los fenómenos ondulatorios. Dado que estos medios poseen cierta elasticidad, es posible efectuar pequeñas perturbaciones sobre ellos y estudiar sus repercusiones. Esta perturbación en general se propaga a lo largo del medio en forma de *onda*. Veamos la fenomenología de algunos ejemplos en medios materiales, llamadas ondas mecánicas.

1.1. Un pulso sobre una cuerda

Si partimos de una cuerda estirada a la cual le sometemos un cambio en el eje vertical en una de sus extremidades, para luego volver a la posición inicial, generaremos una perturbación conocida como un *pulso*. Éste se caracteriza por ser descrito mediante una función que sale del valor nulo solamente durante un cierto intervalo de tiempo, Δt, llamado *ancho* del pulso. El pulso puede tener diversas formas expresadas todas ellas a través de distintas funciones. Vale notar que ha sido a través de ese tipo de ondas que se inventó la primer forma de comunicación de larga escala, el *telégrafo*. A diferencia de una onda mecánica que se propaga a través de una cuerda, los pulsos son producidos por descargas eléctricas en cables conductores[1]. Se establecieron como patrón dos intervalos de tiempo característicos fijos T_1 (corto) y T_2 (largo) para definir un código binario, sobre el cuál se creó el código Morse para codificar letras y números en términos de secuencias de pulsos cortos y largos.

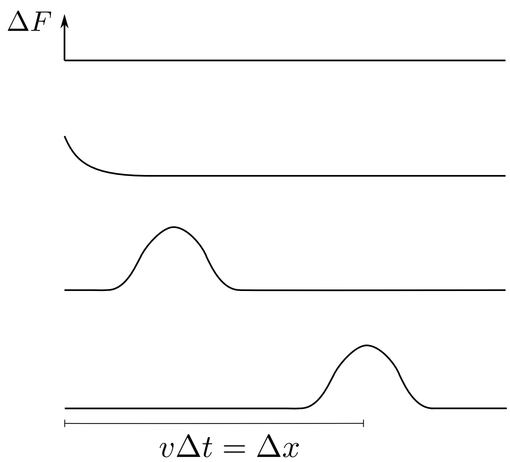


Figura 1: Formación de un pulso propagante en una cuerda. Las figuras muestran la forma de la cuerda en diferentes instantes.

[1]El estudio de los fenómenos eléctricos se dá en Física 3

1.2. Superficie de un líquido

La figura 2 representa una imagen bastante familiar del día-a-día. Un objeto sólido sobre la superficie libre de un líquido que reposa en un recipiente. Se impone un pequeño aumento de presión que actúa solamente sobre el área del objeto (en este caso, la punta del dedo). Como lateralmente el fluido está libre para moverse, la compresión de una zona produce una expansión de la zona contigua; el fenómeno se repite sucesivamente, promoviendo la propagación de la perturbación inicial a lo largo de la superficie. Como consecuencia de la simetría puntual, las ondas formadas serán circulares. En general, la forma de la onda *copia* la forma del objeto que la genera, menos cuando existan otras limitaciones al movimiento, como barreras, otros movimientos del fluido, etc.

Figura 2: Dos tipos diferentes de perturbación generan dos formas de onda diferentes. Una fuente puntual genera ondas circulares, mientras que un objeto rectilíneo produce ondas planas.

1.3. Ondas en sólidos

Ningún cuerpo sólido es absolutamente rígido; todo cuerpo posee cierta elasticidad, la cual depende básicamente del material que lo conforma. Así, cuando golpeamos un objeto relativamente flexible, como una regla de material plástico o un trampolín de una piscina, vemos la existencia de vibraciones de pequeñas amplitudes, pero claramente observables. Para materiales más rígidos, como el hierro, el tamaño característico de esas perturbaciones es mucho menor, pero puede ser sentida a través del tacto y del sonido que se genera cuando el material es golpeado. Los terremotos son consecuencias de la propagación de un efecto de desplazamiento de la corteza terrestre; aunque el movimiento ocurre en una área geográfica restringida, ese movimiento genera un impacto, que se propaga por la corteza vía *onda sísmica*.

1.4. El sonido

El aire también es un fluido (gaseoso) que sufre deformaciones locales cercanas a los objetos sólidos que vibran. La figura 3 busca ejemplificar la representación del mecanismo de generación de la onda de sonido. El movimiento de la superficie sólida hace cambiar (localmente) la densidad y la presión del aire (u otro fluido, por ejemplo, agua) esa perturbación se propaga de forma prácticamente libre por el medio. Esas pequeñas perturbaciones producen pequeños movimientos sobre el tímpano presente en los oídos, permitiendo la audición.

1.5. Conceptos generales

Las llamadas *ondas mecánicas* son aquellas que se propagan a través de un medio material, que precisa ser relativamente denso y tener cierta elasticidad[2].

Existen dos tipos básicos de ondas mecánicas

[2] La luz es una onda *electromagnética* que se propaga por el *vacío*, que consiste en un caso muy particular de ondas, que no involucra la existencia de un medio material.

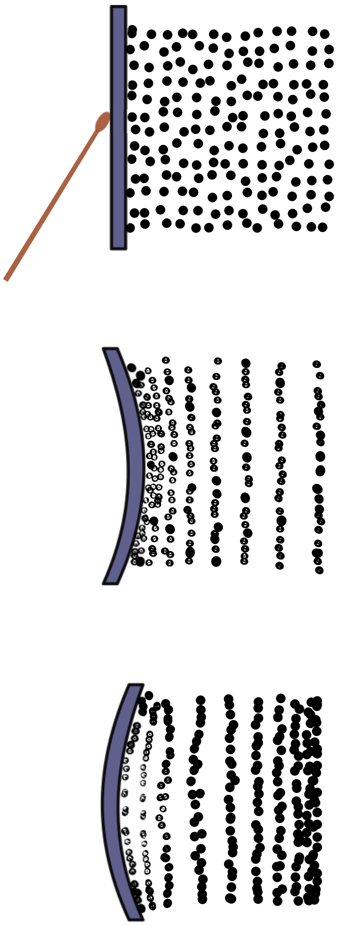


Figura 3: Descripción pictórica de la formación de una onda de sonido como consecuencia de la vibración de una superficie elástica. Ej: un gongo, un platillo o la membrana de un tambor.

I) Ondas longitudinales: La perturbación ocurre en la misma dirección que la propagación. Ejemplo:

   a) Pulso sobre la extremidad de un resorte medianamente estirado.
   b) El sonido.
   c) Impacto sobre el extremo de una barra.

II) Ondas transversales: La perturbación ocurre en una dirección ortogonal a la de propagación. Ejemplo:

   a) Pulso en una cuerda.
   b) Vibraciones de una viga.
   c) Radiación electromagnética.

III) Ondas mixtas: las ondas que se forman en la superficie de un fluido en general poseen un componente transversal y uno longitudinal. Una pequeña porción de fluido describe un círculo durante la perturbación.

Es importante resaltar que no ocurre transporte de materia asociado al fenómeno ondulatorio. Lo que se propaga es la deformación, transportando energía y también momento lineal. Cada punto del medio describe un movimiento esencialmente pequeño y más parecido a un movimiento periódico, mientras que la deformación se propaga con velocidad aproximadamente constante por distancias que pueden ser bastante grandes (Ondas en el océano recorren miles de kilómetros, por ejemplo). Las distancias recorridas dependerán básicamente de las disipaciones.

2. Ondas en una dimensión

Para realizar una descripción del fenómeno ondulatorio, vamos a buscar una formulación matemática que sea apropiada.

2.1. Onda progresiva

Queremos buscar una descripción matemática para la propagación de un pulso sin hacer ninguna restricción a una forma geométrica en particular. Para este fin vamos a determinar la posición de un pulso, o mejor dicho, la posición de un punto arbitrario del pulso, para dos sistemas de referencia distintos: uno fijo y otro que se propaga a la misma velocidad que el pulso. La velocidad del pulso es supuesta constante. Sea $y(x,t)$ una función que representa la posición vertical del punto x del medio en el instante t (referencial fijo). Para $t=0$ los referenciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ coinciden. O sea $y(x,0) \equiv y'(x',0) = f(x)$.

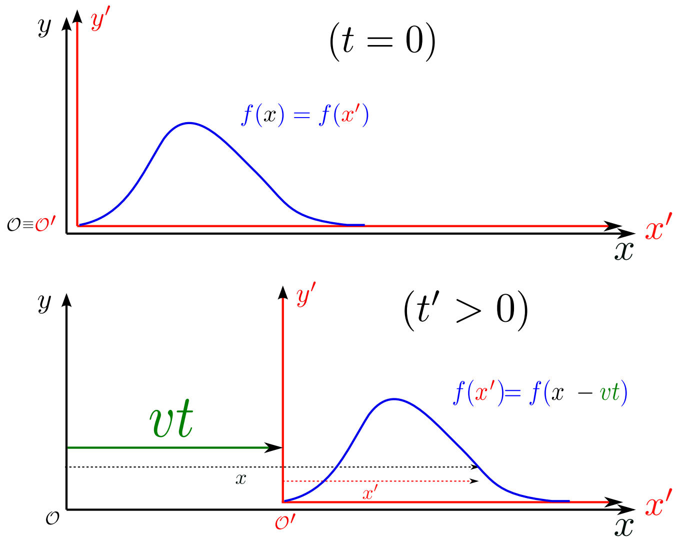


Figura 4: Pulso descripto por dos referenciales diferentes. Para $t=0$, ambos referenciales coinciden (desplazados en la figura para mejor visualización). Después de un tiempo t, el pulso se desplazó una distancia $D = vt$, pero en el referencial $\mathcal{O}'$ se mantiene inalterado.

El referencial $\mathcal{O}'$ se mueve a la velocidad de la onda, por lo tanto, $x = D + x' \to x' = x - vt$, con $D = vt$. Como la forma del pulso no cambia, $f(x) = f(x')$, entonces $y'(x',t') = y'(x',0) = f(x)$, que no depende de t. $y'(x',t) = f(x') \to$ escrito para $\mathcal{O}'$. La transformación de variables

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}' \to \begin{cases} y' = y \\ x' = x - vt, \end{cases}$$

que sustituyendo en $y(x,t)$ nos lleva que $y(x,t) = f(x - vt)$. Si el pulso se propaga en la dirección contraria, es suficiente cambiar el signo de la velocidad, o sea $f(x+vt)$. Notemos que la forma de las funciones $f(x')$ y $g(x'')$ no está restringida ni especificada. Lo que si existe es la relación entre x y t. Por ejemplo:

I) $f(x,t) = \cos(k(x - vt)) \to$ Onda armónica progresiva

II) $f(x,t) = \cos(kx)\cos(kvt) \rightarrow$ Onda armónica estacionaria, no prograsiva

III) $f(x,t) = Ae^{\alpha x}e^{\beta t}$ Producto de dos funciones, x y t?? NO engañarse...$e^{\alpha x}e^{\beta t} = e^{\alpha(x+\beta/\alpha t))}$. Progresiva!!

IV) $f(x,t) = Ae^{[(x-vt)^2-x_o^2]/\Delta^2}$, con A, x_o, Δ constantes. Pulso de forma Gaussiana que se propaga.

En todos los casos, la onda es propagante si se puede hacer el cambio de variables $X' = x - vt$. Vamos a analizar con más profundidad el caso de las ondas periódicas.

2.2. Onda armónica

Un caso particular muy útil es el que consiste de una función sinusoidal. Considere que en el sistema de referencia que camina con la onda, $f(x')$ es una función armónica, o sea

$$f(x') = \mathrm{A}\cos(kx' + \delta) \tag{1}$$

o alternativamente $g(x') = \mathrm{B}\mathrm{sen}(kx' + \delta)$. Si hacemos $x' = x - vt$, la forma de la onda $y(x,t)$ será

$$y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - kvt + \delta) \tag{2}$$

Vamos a analizar el comportamiento de esta función para $t = cte$ y $x = cte$ alternadamente.

2.2.1. $x = cte$

Para $x = x_0$ fijo implica en observar que pasa con un pequeño tramo de la cuerda, ubicado en la posición x_0 a medida que pasa el tiempo. Vemos que, $y(x_0,t) = f(t)$, entonces

$$y(x_0,t) = \mathrm{A}\cos(kvt - \underbrace{(kx_0 - \delta)}_{\delta'}) \tag{3}$$

O sea, un determinado punto x_0 describe un movimiento armónico simple a lo largo de la vertical y cuya frecuencia angular es $\omega = kv$.

Las constantes A y δ' pueden ser determinadas por las condiciones iniciales específicas de cada problema.

2.2.2. $t = cte$

Alternativamente, podemos tomar un $t = t_0$ fijo, y analizar el perfil espacial $y(x,t_0)$, lo que sería equivalente a tomar una fotografía de la onda y describir la forma geométrica de la deformación. O sea, para un instante de tiempo la forma es dada por $y(x,t_0)$, donde

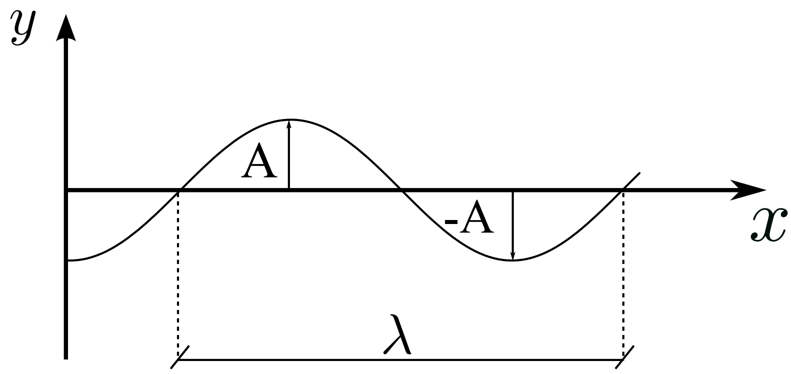


Figura 5: Diagrama de una onda sinusoidal con un desfasaje. Representación de la longitud de onda λ.

$$y(x, t_0) = \mathrm{A}\cos(kx + (\delta - kvt_0)) \tag{4}$$

O sea, aparece una función oscilatoria en el dominio del espacio.

Si $kv = \omega$, eso significa que $k = 2\pi\frac{\nu}{v}$. Veamos la dimensionalidad de esta constante:

$$[k] = 2\pi\frac{\cancel{[T]}}{\cancel{[T]}[L]} = \frac{2\pi}{[L]} \tag{5}$$

o sea, es el inverso de distancia. También sabemos que $\nu = \frac{1}{T}$, siendo T el periodo de la oscilación vertical. Quedamos entonces con

$$k = 2\pi\frac{1}{Tv} \tag{6}$$

El produto Tv representa entonces la distancia que el pulso camina durante un periodo. Así, $\lambda = Tv$ es el período espacial o *longitud de onda*. Al analizar la figura 5, llamamos λ a la distancia que existe entre dos puntos de misma fase, representando un ciclo de esa función. Así,

$$k = 2\pi/\lambda \tag{7}$$

es la *frecuencia espacial* de la onda.

Los puntos de máximos verticales de la función se llaman crestas, los puntos x_n donde $y(x_n, t) = 0$ se llaman nudos y los puntos de mínimo, valles. En la práctica para determinar el longitud de onda, se toma la distancia entre dos puntos equivalentes de la función (por ejemplo: dos crestas o dos valles) como se puede ver en la figura 5.

Por último, notemos que la condición de velocidad constante para la onda progresiva implica que en el referencial que se mueve junto a la onda, la función que la describe no depende del tiempo. Si ahora tomamos $y(x, t)$ en el referencial fijo:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{A}\cos(x') \\ x' &= kx - \omega t + \delta \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = 0$. A su vez, $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega$. tenemos entonces

$$k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega = 0 \tag{9}$$

y como $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, concluimos que $v = \omega/k$.

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{10}$$

que representa la velocidad de propagación de la onda. Si usamos que $\omega = 2\pi\nu$ y $k = 2\pi/\lambda$, encontramos una relación bastante general

$$v = \lambda\nu \tag{11}$$

La ecuación (11) muestra que la velocidad de propagación de la onda es el producto de su frecuencia por su longitud de onda. Por lo tanto, para una onda armónica v, λ y ν no son variables independientes.

3. Onda en una cuerda

En las secciones anteriores se han presentado algunos aspectos generales de los fenómenos ondulatorios y se presentaron las descripciones matemáticas de dos tipos característicos de ondas: la progresiva (que se mueve a velocidad constante) y la armónica, descrita por funciones periódicas. Ahora se discutirán propiedades específicas de las ondas que se propagan en cuerdas. Para este fin vamos a analizar el movimiento de un elemento de largo ΔL, que contiene un elemento de masa Δm, y de densidad lineal $\mu = \Delta m/\delta L$ constante.

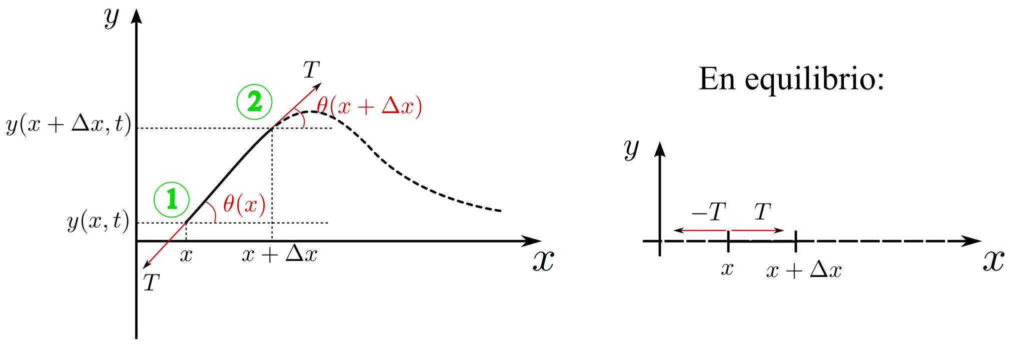


Figura 6: Diagrama de fuerzas de una sección del largo ΔL de una cuerda.

En la posición de equilibrio, la cuerda está tensionada y toda la tensión está contenida en la dirección $\hat{x}$. Tenemos que $y(x,t) = 0\ \forall x, t$. En cada punto x, hay un par de fuerzas T y $-T$ que se cancelan entre sí.

Ahora imaginamos un pequeño desplazamiento en la dirección transversal, en el plano $\mathcal{O}_{xy}$.
Al suponer un *pequeño* desplazamiento imaginamos que $|\vec{T}| \approx cte$.

Pero la dirección de esta fuerza sí cambia. Este desequilibrio en las direcciones de las tensiones genera un movimiento en la dirección transversal. Notemos que la componente horizontal de esa fuerza prácticamente no cambia de valor, ya que para θ pequeño $\cos\theta \approx 1$, y por lo tanto no hay desplazamiento lateral del elemento de masa.

Aplicaremos las leyes de Newton al elemento ΔL, el cual podemos apreciar en la figura 6. En la dirección y podemos identificar las fuerzas en las extremidades del elemento ΔL

$$\begin{aligned} T_2^y &= T\mathrm{sen}(\theta(x+\Delta x)) \\ &\approx T\tan(\theta(x+\Delta x)) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} T_1^y &= -T\mathrm{sen}(\theta(x)) \\ &\approx -T\tan(\theta(x)) \approx -T\frac{\partial y}{\partial x}(x) \end{aligned} \tag{13}$$

Las fuerzas verticales de tensión pueden ser escritas como

$$\vec{T}_2^y + \vec{T}_1^y = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right] \tag{14}$$

.

Si multiplico ambos lados por Δx, me quedo con

$$\vec{T}_2^y + \vec{T}_1^y = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right]\frac{\Delta x}{\Delta x} \tag{15}$$

. Si tomamos $g = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, vemos que lo que está entre corchetes en el lado izquierdo es la derivada de g con respecto a x

$$T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right]\frac{\Delta x}{\Delta x} = T\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \tag{16}$$

como se muestra abajo

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right]/\Delta x = \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} = \frac{\partial g}{\partial x}, \tag{17}$$

que es la segunda derivada de y con respecto a x. Esta expresión representa la suma de las fuerzas verticales, que debe ser igualado a $\Delta m\ddot{y} = \mu\Delta x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

O sea,

$$T\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \tag{18}$$

Eliminando Δx de ambos lados de la igualdad, tenemos

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0, \tag{19}$$

la cual reescrita nos queda

$$-\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0. \tag{20}$$

La ecuación (20) es llamada ecuación de la onda. A pesar de la habernos obtenido para el desplazamiento vertical de una cuerda, veremos que su aspecto general es el mismo para otros tipos de onda.

3.1. Forma genérica $f(x \pm vt)$

Vamos a demostrar que una función arbitraria del tipo $f(x - vt)$ es solución de la ecuación de onda obtenida anteriormente. Vamos a calcular sus derivadas utilizando la regla de la cadena. Utilizaremos el siguiente cambio de variable para que sea de más fácil comprensión: $x' = x - vt$ y $f = f(x')$.

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial f}{\partial x'}.\end{gathered} \tag{22}$$

Si sustituimos los valores de la derivadas segunda de nuestra onda genérica $f(x - vt)$ en la ecuación de la onda, (20),

$$v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = 0, \quad \forall f \tag{23}$$

$$\left[v^2 - \frac{T}{\mu} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = 0. \tag{24}$$

De lo que se deduce $v^2 = \frac{T}{\mu}$.
Por lo tanto, una onda de forma arbitraria que viaja por una cuerda tiene una velocidad que depende de la tensión y de la densidad lineal, y no de la forma de la onda.

3.2. Forma armónica

También podemos demostrar que una función armónica es solución de la misma ecuación diferencial.

$$y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = +\mathrm{A}\omega \mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mathrm{A}\omega^2 \cos(kx - \omega t) \tag{26}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\mathrm{A}k \mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\mathrm{A}k^2 \cos(kx - \omega t) \tag{27}$$

Si sustituimos las ecuaciones (25) y (27) en la ecuación de ondas, 20, obtenemos

$$-\mathrm{A}\omega^2 \cos(kx - \omega t) - \frac{T}{\mu} \mathrm{A}k^2 \cos(kx - \omega t) = 0, \tag{28}$$

$$\left[\omega^2 - \frac{T}{\mu} k^2 \right] \cos(kx - \omega t) = 0. \tag{29}$$

Esto implica que

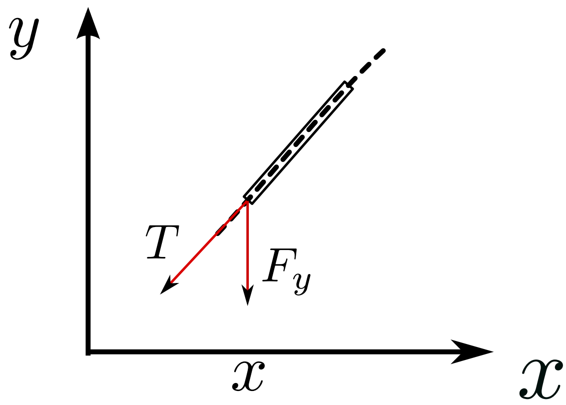
$$\omega^2 - \frac{T}{\mu} k^2 = 0, \tag{30}$$

O, lo que es lo mismo,

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T}{\mu} = v^2. \tag{31}$$

4. Energía y potencia

Vamos a cuantificar la potencia que es transmitida por la onda, usando como ejemplo el caso de la cuerda. De esta manera podemos utilizar las leyes de la mecánica de forma más clara.
Analizamos la energía que fluye por una sección transversal ubicada en una dada posición x de la cuerda.



La potencia instantánea que cruza una sección x es:

$$P(x,t) = \vec{F} \cdot \vec{u}, \tag{32}$$

en donde $\vec{u}$ no es la velocidad de propagación del pulso sino que la velocidad instantánea, paralela a la dirección y ($\vec{u} \parallel \hat{y}$), con que el elemento Δx es movido de su posición de reposo. Notemos que la tensión vertical actúa como fuerza restauradora en un movimiento armónico.

$$P(x,t) = \underbrace{-T\frac{\partial y}{\partial x}}_{F_y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{u} \tag{33}$$

Notar que esta ecuación tiene validez general, que vale para toda forma de onda y no está limitada a ningún caso en particular.

4.1. Onda armónica

Tomemos $y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t + \delta)$ y calculemos sus derivadas parciales.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\mathrm{A}k\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta) \tag{34}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{A}\omega\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta) \tag{35}$$

Y sustituyendo en la definición de potencia explicitada en la ecuación (32),

$$P(x,t) = T\mathrm{A}^2k\omega\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta). \tag{36}$$

Como y es periódica y cuadrática, lo más útil es determinar la potencia media, promediando sobre un período $\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$, es decir,

$$\bar{P} = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}} P(x,t)\mathrm{d}t, \tag{37}$$

sustituyendo la potencia y utilizando el hecho de que la función $\mathrm{sen}^2(\theta)$ es par en θ

$$\bar{P} = T\mathrm{A}^2k\omega\underbrace{\frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2}\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)\mathrm{d}t}_{1/2}. \tag{38}$$

Utilizando las relaciones: $k = \frac{\omega}{v}$ y $T = v^2\mu$, tenemos

$$\bar{P} = v^2\mu \mathrm{A}^2 \frac{\omega}{v}\omega\frac{1}{2}, \tag{39}$$

y simplificando obtenemos finalmente

$$\bar{P} = \frac{v\mu}{2}\omega^2 \mathrm{A}^2. \tag{40}$$

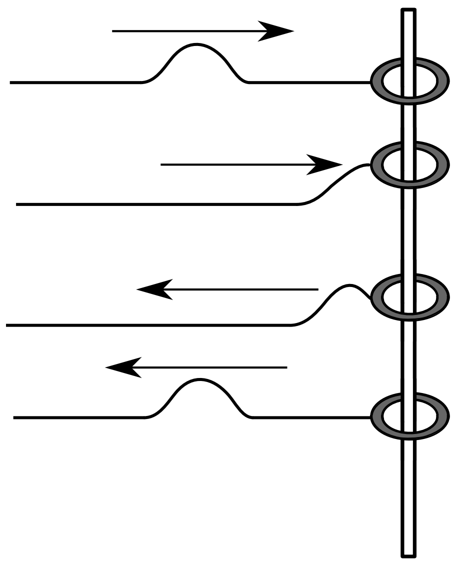
Este es un resultado muy importante que dice que la potencia transmitida es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia y al producto $v\mu$ que solo depende del medio de propagación, y no de la onda misma.

5. Reflexión

Las ondas en general se trasladan por medios materiales que no son infinitos en el espacio. Cuando la onda alcanza el borde de un medio, ella sufrirá un cambio. La extremidad de una cuerda, la playa para las ondas del mar, las paredes de una piscina, etc. El cambio dependerá de las condiciones de cada situación. A esto se le llama *condiciones de borde*. Veamos el caso de una cuerda.

Existen dos tipos de extremidad: *libre* o *fija*.

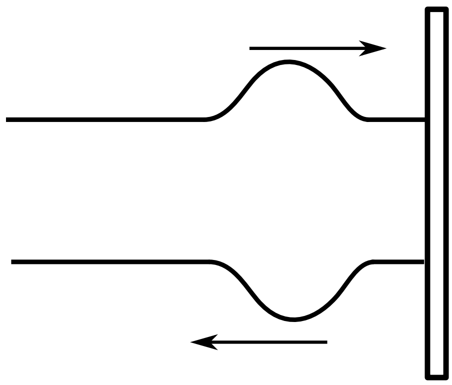
5.1. Libre



La argolla permite que el punto suba y baje sin fuerza externa. Eso es posible eliminando el rozamiento vertical y por lo tanto, en ese punto la barra no ejerce fuerza vertical sobre la cuerda. El pulso rebotará con *la misma forma*, ya que solamente fuerzas horizontales actúan sobre la cuerda. Si $f(x - vt)$ representa la onda incidente, $f(x + vt)$ representa la onda que rebota.

5.2. Fija

Al llegar el pulso, la cuerda promueve una fuerza sobre la barra, que tenderá a tirarla para arriba. La barra entonces ejerce una fuerza vertical sobre la cuerda, que consiste en la reacción de la barra sobre la cuerda, que tiene sentido opuesto a la primera, haciendo que el pulso rebote con la *forma invertida*. Si $f(x - vt)$ representa la onda incidente, $-f(x + vt)$ representa la onda que rebota.



6. Refracción

La refracción ocurre cuando se da el encuentro entre dos medios diferentes. Entonces una parte de la onda es transmitida y otra parte es reflejada.

Veamos algunos ejemplos:

- dos partes de una misma cuerda con tensiones diferentes, como puede verse en la figura 7.

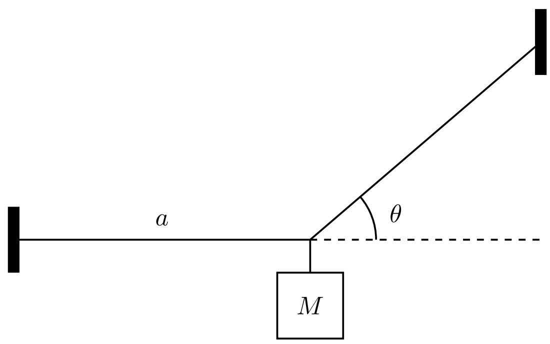


Figura 7: Diagrama de una cuerda sometida a tensiones diferentes.

- La propagación de una onda en dos líquidos de densidades distintas.
- dos cuerdas de diferentes densidades, como las figuras 8 y 9. El pulso, al incidir sobre la cuerda densa, sufre una fuerza de reacción, que no es igual en módulo a la incidente, pero tiene sentido opuesto. El pulso reflejado tendrá el sentido opuesto, pero el pulso que se transmite a la cuerda densa tendrá la misma forma que el pulso incidente.

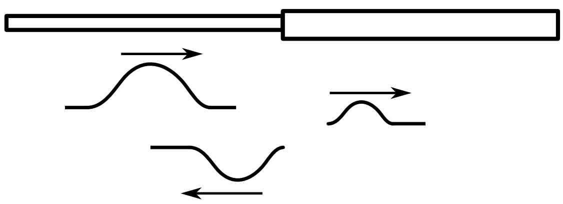


Figura 8: Diagrama de una onda propagándose en una cuerda que cambia de un medio de menor densidad a uno de mayor densidad. Una parte de la onda es transmitida; la parte rebotada se invierte.

- Si por otro lado, el pulso incide sobre la cuerda más liviana, la fuerza de reacción no será suficiente para invertir la forma del pulso, entonces ambos pulsos, el reflejado y el transmitido tendrán el mismo signo que el pulso incidente.

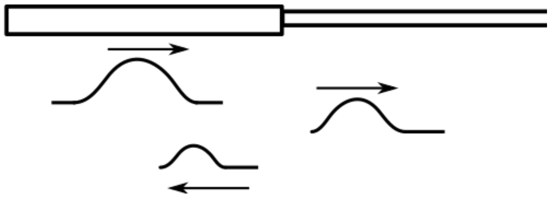


Figura 9: Diagrama de una onda propagándose en una cuerda que cambia de un medio densidad alta hacia a uno de densidad menor. Una parte (mayor) es transmitida; la parte reflejada tiene la misma fase.

Con base en estos hechos es que analizaremos el problema de una cuerda vibrante con extremos fijos.

7. Principio de superposición

El principio de superposición representa la evidencia experimental de que las amplitudes de dos o más ondas, al encontrarse en el mismo punto x del medio, se suman linealmente. Es decir, si $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ son dos pulsos en la misma cuerda, la onda resultante será

$$y_T(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{41}$$

Este hecho da origen al proceso de interferencia, entre otros efectos. Si las amplitudes van en el mismo sentido, se suman y la onda crece, ver figura 10. Y si van en sentidos opuestos, un pulso tiende a cancelar al otro y si son iguales en amplitud, llegan a anularse, como se ve en la figura ver figura 11.

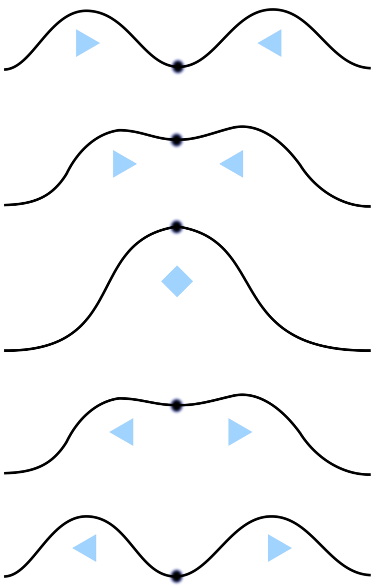


Figura 10: Diagrama de dos ondas interfiriendo constructivamente en una cuerda.

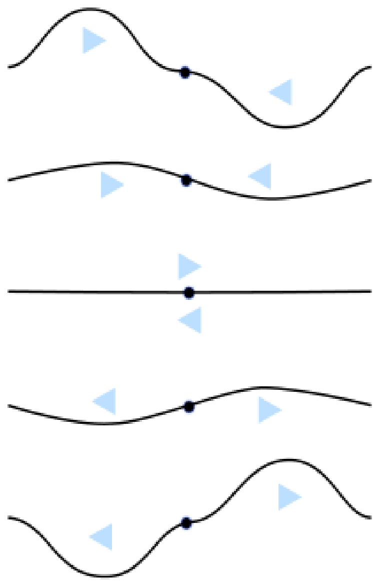


Figura 11: Diagrama de dos ondas interfiriendo destructivamente en una cuerda.

Además, como el fenómeno ondulatorio no involucra traslado de materia, la propagación de un pulso no afecta la propagación del otro. Después de cruzarse, los pulsos siguen sus trayectorias, frecuencias y velocidades inalteradas. A continuación, vamos a analizar algunos casos particulares de ondas que se superponen.

7.1. Sentidos opuestos

Suponemos dos ondas iguales, es decir misma frecuencia y misma amplitud. Como estas se superponen en un mismo medio, ambas tienen también la misma velocidad de propagación (que solo depende de las propiedades del medio). Por lo tanto, sus longitudes de onda también son iguales.

$$y_T(x,t) = f(x - v_1 t) + g(x + v_2 t), \tag{42}$$

donde f y g son dos formas de pulso no necesariamente iguales los cuales están viajando en sentidos opuestos a la misma velocidad ($v_1 = v_2 = \frac{\omega}{k}$). El caso particular interesante es el caso de las ondas armónicas. Vamos a utilizar el caso de una cuerda con dos extremos fijos. Al enviar un pulso sobre la cuerda, esta rebota con la fase invertida, entonces la onda resultante es

$$y_T(x,t) = \mathrm{A}\left(\cos(\underbrace{kx+\delta}_{a} - \underbrace{\omega}_{b}\, t) - \cos(\underbrace{kx+\delta}_{a} + \underbrace{\omega t}_{b})\right). \tag{43}$$

Utilizando las siguientes relaciones trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b), \\ \mathrm{sen}(a \pm b) &= \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a), \end{aligned} \tag{44}$$

tenemos que,

$$y_T(x,t) = \mathrm{A}\left[\cancel{\cos(kx+\delta)\cos(\omega t)} + \mathrm{sen}(kx+\delta)\mathrm{sen}(\omega t) - \cancel{\cos(kx+\delta)\cos(\omega t)} + \mathrm{sen}(kx+\delta)\mathrm{sen}(\omega t)\right] \tag{45}$$

Resultando finalmente en la siguiente expresión

$$y_T(x,t) = 2\mathrm{A}\mathrm{sen}(kx+\delta)\cos(\omega t). \tag{46}$$

Vea que la resultante $y_T(x,t) \neq y(x \pm vt)$, y por lo tanto no es una onda que se propaga. Por ello, la ecuación (46) es llamada *onda estacionaria.* El tiempo y la posición están desacoplados, o sea $y_T = f'(x)g'(t)$. La fase δ es una constante que depende de las condiciones de borde.

Para determinar cómo la intensidad de la onda se distribuye a lo largo de la cuerda, debemos partir de la ecuación 32 y obtener el resultado mostrado en la ecuación 40

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mathrm{A}'^2\omega^2 v\mu, \tag{47}$$

en este caso la amplitud no es una constante y toma el valor $A'(x) = 2A\cos(kx+\delta)$. Por lo tanto, depende periódicamente de la posición. O sea,

$$P(x) \propto \mathrm{sen}^2(kx+\delta). \tag{48}$$

La intensidad dependerá de la posición en la que nos situemos en la cuerda. Y debido a que la intensidad I es periódica y acotada, se observarán máximos y mínimos cuando:

- **Máximos**: $\cos^2 = 1$. Esta condición se cumple si y sólo si ($\iff$) $kx+\delta = m\pi$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

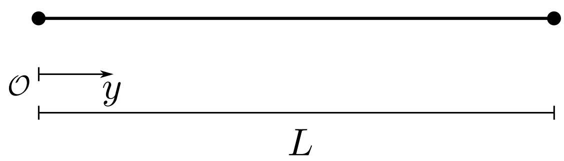
  Las posiciones de los máximos cumplirán que: $x^{\text{máx}} = \dfrac{m\pi - \delta}{k}$.

- **Mínimos**: $\cos^2 = 0$. Esta condición se cumple si y sólo si ($\iff$) $kx+\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

  Las posiciones de los mínimos cumplirán que: $x^{\text{mín}} = \dfrac{\frac{(2m+1)}{2}\pi - \delta}{k}$.

Estas expresiones demuestran que habrá posiciones en que la intensidad de la onda es máxima, mientras que en otras será mínima, eventualmente anulándose por completo. Para saber dónde se darán los máximos y mínimos dependerá de cada situación física. Por ejemplo, si excitamos bajo la misma frecuencia dos cuerdas de distinta densidad lineal de masa e igual longitud tendrán distintos números de onda k, ya que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v}$ y como sabemos, v depende de la densidad y de la tensión aplicada a la cuerda: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

7.2. La cuerda vibrante



Suponemos una cuerda con extremidades fijas. Si a una extremidad, por ejemplo la izquierda, se le aplica una onda armónica, la cual se propagará hacia la derecha, al encontrar el otro extremo ésta se verá reflejada. La superposición de esas dos ondas ha sido analizada en la primer parte de la sección 7. La resultante es:

$$y_T(x,t) = 2\text{A}\text{sen}(kx+\delta)\cos(\omega t)$$

Si ahora imponemos la condición de extremo fijo, $y_T(0,t) = 0 \ \forall t$ tenemos que $2\text{A}\text{sen}(\delta) = 0$. En lo que deriva a $\delta = 0$. La onda toma entonces la forma

$$y_T(x,t) = 2\text{A}\text{sen}(kx)\cos(\omega t) \tag{49}$$

Continuando con el razonamiento debemos imponer el punto fijo para $x = L$. Es decir, $\text{sen}(kL) = 0$ lo cual deriva a la condición: $kL = m\pi$ para $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Debido a la relación entre la longitud de onda y el número de ondas: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, llegamos a que la longitud de onda debe satisfacer

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = m\pi \implies \lambda_m = \frac{2L}{m}. \tag{50}$$

De la ecuación (50) podemos apreciar que no son todas las longitudes de ondas que satisfacen la condición de extremos fijos. Podemos pensar esto de otra manera y preguntarnos: ¿Cuántas mitades de 1 longitud de onda entran en la cuerda de largo L? La respuesta es obtener el valor de L en función de λ a partir de la ecuación (50):

$$L = m\frac{\lambda_m}{2}. \tag{51}$$

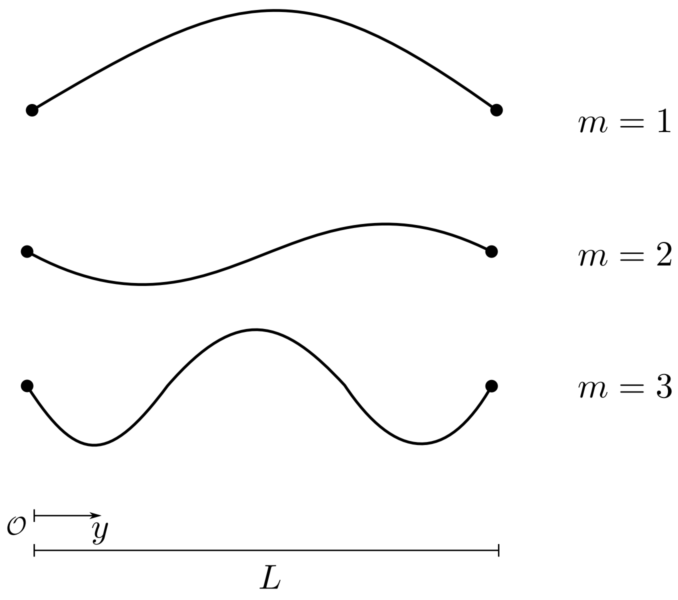


Figura 12: Tres primeros modos posibles de vibración de una cuerda de largo L con extremos fijos.

En otras palabras, solamente algunos longitudes de onda pueden oscilar de forma estacionaria. Las $\lambda_m = 2L/m$ se llaman modos normales de vibración. Los 3 primeros están mostrados en la figura 12 para m=1,2 y 3. Como la velocidad v es fija para la cuerda (no depende del número m) $k \to k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$. Como $v = \frac{\omega}{k}$, tendremos que las frecuencias admitidas serán

$$\omega_m = k_m v. \tag{52}$$

Si substituimos la velocidad, la última ecuación queda

$$\omega_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}\sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{53}$$

Usando la ecuación 50 quedamos con una relación entre la frecuencia emitida y el largo, la tensión y la densidad de la cuerda, además del modo específico m. Así vemos que al apretar las cuerdas de una guitarra, aumentamos la tensión, haciendo crecer su frecuencia, obteniendo sonidos más agudos. Al mismo tiempo, sabemos que las cuerdas más gruesas (y así, más densas) produce sonidos más graves, correspondiendo a frecuencias más bajas. Por fin, el instrumentista modifica constantemente el largo de la cuerda, posicionando los dedos de una de las manos de manera a acortar el largo, lo que producirá un sonido más agudo.

De forma general, los puntos mínimos, llamados nodos, son encontrados utilizando la ecuación (49):

$$y_T(x,t) = 2\text{Asen}(kx)\cos(\omega t),$$

e imponiendo que $\text{sen}(kx) = 0$. Esto se traduce a la condición $kx_m = m\pi$, ó $\frac{2\pi}{\lambda}x_m = m\pi$. Es decir,

$$x_m = m\frac{\lambda}{2}. \tag{54}$$

La distancia entre dos mínimos consecutivos será

$$|x_{m+1} - x_m| = \frac{\lambda}{2}.$$

Lo mismo valdrá para los anti-nodos.

7.3. Mismo sentido. Fase y amplitud distintas

Ahora consideremos que dos ondas armónicas tiene la misma frecuencia, pero las fases y amplitudes no son iguales. En este caso, la onda resultante es dada por la suma

$$y_T(x,t) = \mathrm{A}_1\cos(kx - \omega t + \phi_1) + \mathrm{A}_2\cos(kx - \omega t + \phi_2). \tag{55}$$

En donde ϕ_1 y ϕ_2 son determinadas por condiciones iniciales o de borde no son en general iguales. Para mejor visualizar como se da la superposición de tales ondas, podemos introducir el concepto de fasores, o vectores girantes. Para eso, considere que una onda armónica cualquier

$$y(x,t) = A\cos(\Phi(x,t)) \tag{56}$$

donde $\Phi(x,t) = kx - \omega t + \phi$ puede ser vista como la proyección sobre el eje horizontal de un vector

$$\vec{A}(x,t) = A\cos(\Phi(x,t))\hat{\imath} + A\mathrm{sen}(\Phi(x,t))\hat{\jmath} \tag{57}$$

como se ve en la figura 13, donde se representan los fasores de las dos ondas fundamentales. Observamos que la amplitud de la onda resultante se obtiene como una suma vectorial y puede ser obtenida a partir de la ley de los cosenos.

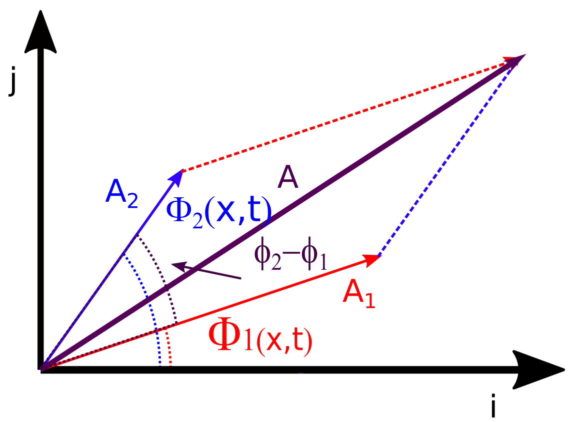


Figura 13: Diagrama de fasores para representar ondas armónicas.

Así tenemos que

$$A^2 = \mathrm{A}_1{}^2 + \mathrm{A}_2{}^2 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cos(\phi_2 - \phi_1), \tag{58}$$

siendo $\Delta\Phi = \phi_2 - \phi_1$ la diferencia de fase entre las ondas. Notar que este es un método general para las ondas armónicas. Si dos o más ondas de diferentes frecuencias se suman, la resultante se obtendrá por la suma vectorial de sus fasores, pero en ese caso la diferencias de fase no se simplifican y dependerán del tiempo y de la posición.

Como vimos, la potencia media de cada onda es dada por $\bar{P} = \frac{v\mu}{2}\omega^2\mathrm{A}^2$. Así, si multiplicamos ambos lados de la última ecuación por $\frac{v\mu}{2}\omega^2$ encontraremos una ecuación para la potencia media de la onda resultante, quedando con

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + 2\sqrt{\bar{P}_1\bar{P}_2}\cos(\Delta\phi) \tag{59}$$

,

De esa ecuación vemos que la potencia es una función periódica de la diferencia de fase entre las ondas, evidenciando la existencia de máximos y mínimos, un fenómeno visible a simple vista cuando aplicado a una cuerda de guitarra. Analizando la función coseno, tenemos

- **máximos**: cumplen $\cos(\Delta\phi) = +1 \iff \Delta\phi = 2m\pi$. Se puede observar que $\bar{P}_{\text{máx}} > \bar{P}_1 + \bar{P}_2$.

- **mínimos**: cumplen $\cos(\Delta\phi) = -1 \iff \Delta\phi = (2m+1)\pi$.

Vemos que si $\bar{P}_1 \approx \bar{P}_2 = I_0$ entonces

$$\bar{P} = 2\bar{P}_0(1 + \cos\Delta\phi), \tag{60}$$

y, la intensidad máxima y mínima dará

$$\begin{cases} \bar{P}_{\text{máx}} = 4\bar{P}_0, \\ \bar{P}_{\text{mín}} = 0. \end{cases} \tag{61}$$

Como vemos, cuando dos ondas se superponen existirán puntos donde la potencia media se anula, mientras que en otros puntos la potencia media puede ser 4 veces la intensidad de cada una de las ondas. Lo que ocurre es una redistribución de la energía.

8. Ondas en más de una dimensión

Las ondas que se propagan en una cuerda pueden ser consideradas como *unidimiensionales, o lineales - 1D*, ya que la dirección definida por la cuerda es la única propagación posible.

Sin embargo, ondas que se propagan en la superficie libre de un fluido, como ondas en agua, que se forman ocupando un plano, y por eso se consideran ondas *bidimensionales, o circulares - 2D.* Las ondas sísmicas también entran en esta clasificación: durante un terremoto la corteza terrestre se comporta como un fluido, a escala geográfica. Además, el sonido (que será tratado en el próximo capítulo) o la onda electromagnética (que será tratada en Física 3) son ondas que no están limitadas a un plano, propagándose en general en todas las direcciones posibles y son conocidas como ondas (*tridimensionales, o esféricas - 3D*).

No es intención de este curso estudiar en profundidad las ondas tridimensionales, pero sí es necesario llamar la atención para algunas diferencias.

8.1. Intensidad

En general, el concepto de potencia transmitida no es suficiente para analizar el flujo de energía asociado al movimiento de la onda. La primera consecuencia del aumento del número de dimensiones es el hecho de que la energía transportada por la onda está distribuida en el espacio. Por eso, debemos hacer distinción entre el concepto de potencia e *Intensidad* que se define como la potencia, dividida por la región del espacio que la contiene. Veamos caso a caso.

1. Cuerda ($1D$)
   En el caso de una cuerda, la sección transversal es aproximadamente constante y toda la energía fluye por esta sección, de manera que el area es unitario y la distinción entre potencia e intensidad no tiene sentido $[I] = [P]$.

2. Onda circular (agua, $2D$)
   Sabemos que cuando una fuente puntual actúa sobre la superficie, la onda asume una forma circular, por lo tanto, la potencia está distribuida sobre el perímetro de un círculo $2\pi r$, donde r es la distancia de la fuente hasta el punto de observación. Entonces en ese caso la intensidad queda definida por $I_{2D}(r) = \dfrac{P}{2\pi r}$ y la dimensionalidad de I es $[I] = \dfrac{[Potencia]}{[Distancia]}$

3. Onda esférica (sonido, $3D$)
   Al propagarse en todas las direcciones, la onda asume una forma esférica y la energía está distribuida sobre la superficie de esta esfera, cuya área S es $S = 4\pi r^2$. Así la intensidad a cierta distancia r de la fuente es $I(r) = \dfrac{P}{4\pi r^2}$ con $[I] = \dfrac{[Potencia]}{[\acute{A}rea]}$

Vemos entonces que la intensidad luminosa o sonora se reduce a medida que nos alejamos de la fuente, un hecho conocido de nuestra experiencia diaria.

8.2. Interferencia

Otro interesante fenómeno que ocurre en dimensiones mayores es cuando dos (o más) fuentes puntuales de ondas actúan en regiones próximas en el espacio, permitiendo que exista la superposición de esas ondas en una dada región del espacio. Para ser más específico, podemos considerar ondas bidimensionales, donde las fuentes son perturbaciones producidas un objeto sólido, que puede ser un dedo o un actuador mecánico. Si el movimiento de la fuente es periódico, eso causará la existencia de ondas circulares fácilmente visibles en el agua, por ejemplo.

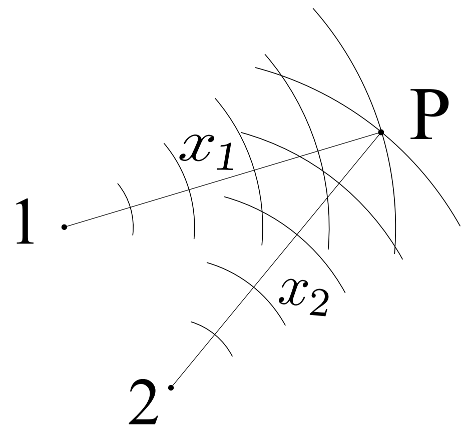
Consideremos dos fuentes de ondas armónicas

$$\begin{cases} y_1(x_1,t) = \mathrm{A}\cos(kx_1 - \omega t), \\ y_2(x_2,t) = \mathrm{A}\cos(kx_2 - \omega t + \delta), \end{cases} \tag{62}$$

Como solo importa el movimiento relativo de una onda con respeto a la otra, podemos tomar una de ellas como *referencia de fase* (Y_1), mientras que un posible atraso entre los actuadores es incorporado en la fase δ. Si suponemos que los actuadores actúan *en fase*, o sea de forma simultánea, implica que $\delta = 0$. En caso de que los actuadores actúan de forma alternada, de manera que cuando uno sube, el otro baja, entonces $\delta = \pi/2$. Vea que en es caso $co(x + \pi/2) = sen(x)$. Vamos a tomar el caso simultáneo.

Estas dos ondas se superponen en el punto P, de manera que la resultante en P es $y(P) = y_1(x_1,t) + y_2(x_2,t)$

$$y(P) = \mathrm{A}_1\cos(kx_1 - \omega t) + \mathrm{A}_2\cos(kx_2 - \omega t). \tag{63}$$



Vemos que este es un caso particular de lo que vimos en la sección 7.3. Si suponemos que las distancias x_1 y x_2 son relativamente próximas, o sea dada la distancia media $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ y la diferencia de camino $\Delta x = x_2 - x_1$, vale la condición de que $\bar{x} >> \Delta x$. Entonces podemos considerar que ambas ondas llegan con la misma intensidad.

Utilizando el resultado de la sección anterior, tenemos la intensidad en el punto P dada por

$$I = 2|\mathrm{A}|^2(1 + \cos(\Delta\phi)) \tag{64}$$

$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) \tag{65}$$

Por lo tanto, la condición de máximos y mínimos es determinada exclusivamente por la diferencia de camino recorrido por cada onda.

- Máximos: $\cos(\Delta\phi) = +1 \Rightarrow \Delta\phi = 2m\pi$. Entonces, $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1) = 2m\pi$. Simplificando:

$$x_2 - x_1 = m\lambda \tag{66}$$

  Esta es la condición para la interferencia constructiva.

- Mínimos: $\cos(\Delta\phi) = -1 \Rightarrow \Delta\phi = (2m+1)\pi$. Entonces, $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2m+1)\pi$. Simplificando:

$$x_2 - x_1 = \frac{2m+1}{2}\lambda \tag{67}$$

  Esta es la condición para la interferencia destructiva.

Este tipo de situación ocurre con ondas en 2 dimensiones, como en la superficie del agua, pero también en 3 dimensiones con ondas de sonido, lo que será discutido en el próximo capítulo.

8.3. Batidos

Imaginemos dos ondas que viajan en el mismo sentido con la misma amplitud pero con número de onda, k, diferentes:

$$\begin{cases} y_1(x,t) = \mathrm{A}\cos(k_1 x - \omega_1 t), \\ y_2(x,t) = \mathrm{A}\cos(k_2 x - \omega_2 t). \end{cases} \tag{68}$$

$$y_T(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{69}$$

Con el fin de analizar esta suma realizaremos el siguiente cambio de variable:

- $\bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
- $\omega_1 = \bar{\omega} - \dfrac{\Delta\omega}{2}$
- $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$
- $k_1 = \bar{k} - \dfrac{\Delta k}{2}$
- $\bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$
- $\omega_2 = \bar{\omega} + \dfrac{\Delta\omega}{2}$
- $\Delta k = k_2 - k_1$
- $k_2 = \bar{k} + \dfrac{\Delta k}{2}$

Sustituyendo estas nuevas variables, tendremos:

$$\begin{aligned} y_T(x,t) =& \mathrm{A}\left\{\cos\left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right. \\ & \left.\cos\left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right\} \end{aligned} \tag{70}$$

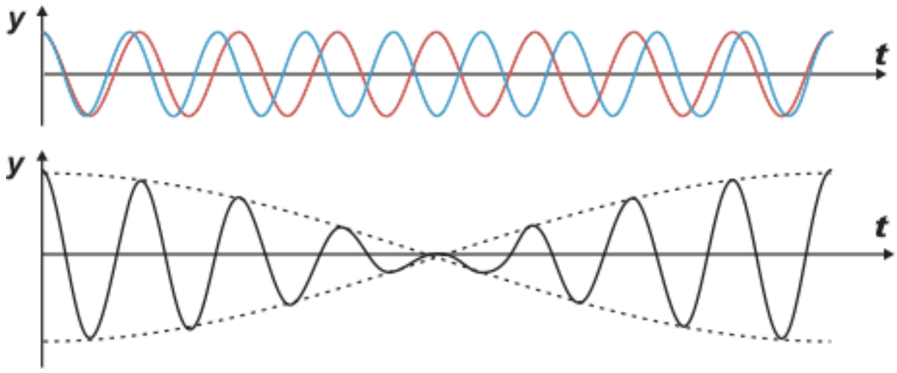
Utilizando las propiedades trigonométricas explicitadas en las ecuaciones (44),

$$y_T(x,t) = \underbrace{\mathrm{A}\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{A(x,t)}\underbrace{\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)}_{B(x,t)} \tag{71}$$

Es decir, $y_T(x,t)$ la onda resultante de la suma es el producto de dos funciones. Los argumentos de éstas están bajo la forma $x - vt$:

$$\begin{aligned} A(x,t) &= A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right), \\ B(x,t) &= \cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right), \end{aligned} \tag{72}$$

cuyos números de onda y frecuencias son $\left(\frac{\Delta k}{2}, \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ y $(\bar{k}, \bar{\omega})$.
La forma aproximada de $y_T(x,t)$ sería



La otra consecuencia es la diferencia de velocidad entre las ondas A y B:

$$\begin{aligned} v_G &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \to \text{Velocidad de grupo}, \\ v_\phi &= \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \to \text{Velocidad de fase}, \end{aligned} \tag{73}$$

El efecto es muy perceptible en las ondas de sonido, siempre que se tocan (por ejemplo: un instrumento) dos notas que son próximas entre sí, generando en nuestra percepción auditiva un acorde musical.

Por último, notamos que a pesar de la clara evidencia de dos velocidades aparentes en la ecuación (72) y explicitadas en la ecuación 73, observamos que en general, esas dos velocidades son en verdad numéricamente iguales. Para verlo, basta notar que cada una de las ondas viaja con la misma velocidad, dada por $v = \sqrt{T/\mu}$, o sea

$$v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}, \tag{74}$$

llevando a que

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = v, \tag{75}$$

Sin embargo, los llamados *medios dispersivos* son aquellos para los cuales la velocidad de propagación sí depende de la longitud de onda. Cuando eso ocurre, $v_1 \neq v_2$ y la velocidad de grupo será distinta de la velocidad de fase.