Vaciado de un tanque

Sandra Kahan, Enzo Spera, Carla Yelpo

El proceso de vaciado de un tanque no es estacionario porque mientras el tanque se vacía, las magnitudes que caracterizan al fluido varían en el tiempo. Demostraremos que, al disminuir la altura del fluido en el tanque, también disminuye su velocidad y, consecuentemente, la velocidad del flujo a la salida.

Estas notas exponen tres posibles soluciones al problema de vaciado de un tanque (ejercicio 3.2 del práctico 3). Dos de las soluciones se deducen con argumentos simples y aproximaciones razonables. La tercer solución, basada en el principio de conservación de la energía, es más exacta.

1. Introducción

La figura 1 muestra un tanque con un pequeño orificio en su base. Usaremos el subíndice 1 para describir las variables del fluido en la superficie libre y el subíndice 2 para las variables en el orificio de salida. Supondremos que en ambos extremos la presión externa es la presión atmosférica, es decir: $P_1 = P_2 = P_0$.

La ecuación de continuidad para fluidos incompresibles de densidad ρ establece una relación entre las velocidades de los flujos y las secciones del tanque y del orificio: $A_1 v_1 = A_2 v_2$. El caso más general no estacionario supone que las variables señaladas en la figura dependen del tiempo.

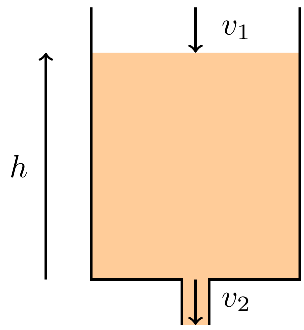

Figura 1

La ecuación de Bernoulli puede aplicarse sin restricciones para analizar el caso estacionario de un tanque que no se vacía. Cabe preguntarse si esa ecuación es válida, también, para el caso no estacionario del vaciado de un tanque. A continuación, repasaremos los resultados más relevantes del caso estacionario para luego demostrar que la velocidad de la superficie libre está directamente relacionada con la variación temporal de la altura. Entonces, aproximaciones que son válidas en el caso estacionario, dejan de serlo en el caso no estacionario.

1.1. Tanque que no se vacía. Caso estacionario.

Si la altura h del fluido en el tanque es constante se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente entre la superficie libre y la sección de salida del fluido por el orificio (ambas a presión atmosférica) para relacionar las velocidades con la altura del fluido en el tanque:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh = \frac{v_2^2}{2} \tag{1}$$

Además, considerando que la sección del tanque es mucho mayor que la sección del orificio ($A_1 \gg A_2$) la velocidad de fluido adentro del tanque puede despreciarse cuando se la compara con la velocidad de salida ($v_1 \ll v_2$), obteniéndose como resultado la ecuación de Torriccelli que indica cómo varía la velocidad de salida con la altura del fluido en el tanque: $v_2 = \sqrt{2gh}$.

Este resultado coincide con la velocidad que adquiere una partícula libre que, partiendo del reposo, recorre una altura h en el campo gravitatorio. Sin embargo, el fluido confinado en el tanque tiene un comportamiento muy diferente al de una partícula libre. La incompresibilidad del fluido supone que las velocidades v_1 y v_2 son uniformes en el tanque y en el caño de salida (resp.).

Más allá del orificio de salida, la velocidad del fluido no confinado aumentará debido a la acción del campo gravitatorio y una presión atmosférica uniforme que no ejerce fuerza neta sobre los elementos del fluido.

1.2. Tanque que se vacía. Caso no estacionario

Si la altura $h(t)$ del fluido varía en el tiempo, la velocidad del fluido en el tanque ya no puede despreciarse porque contiene información de cómo diminuye esa altura: $\frac{dh}{dt} < 0$. Para confirmar esto, basta observar que la masa en el tanque $m_T(t) = \rho A_1 h(t)$ disminuye porque existe un flujo másico $\dot{m}_2(t)$ por el orificio:

$$\frac{dm_T}{dt}(t) = -\dot{m}_2(t) \quad \text{donde:} \tag{2}$$

$$\frac{dm_T}{dt}(t) = \rho A_1 \frac{dh}{dt}(t) \quad \text{y} \tag{3}$$

$$\dot{m}_2(t) = \rho A_2 v_2(t) \tag{4}$$

Considerando, como es habitual, que el fluido en el tanque se mueve con una velocidad de módulo $v_1(t)$ se deduce que:

$$v_1(t) = -\frac{dh}{dt}(t) \tag{5}$$

Si las magnitudes físicas relevantes varían en el tiempo, no es evidente que podamos aplicar la ecuación de Bernoulli, deducida bajo la hipótesis de flujo estacionario. Por eso, en la siguiente sección usaremos argumentos simples y aproximaciones razonables para presentar dos posibles soluciones no exactas del problema 3.2, dejando para más adelante (Sec. 3) una solución más analítica del problema de vaciado de un tanque.

2. Dos soluciones aproximadas

El problema 3.2 indica que el primer vaso de jugo se llena en 12s y pregunta cuánto tiempo adicional se necesita para vaciar la jarra que inicialmente contenía 15 vasos de jugo.

Definimos $h(t = 0) = h_0$ como la altura inicial y $v_1(t = 0) = v_0 \neq 0$ como el módulo de la velocidad inicial del fluido en el tanque. La meta es determinar un tiempo t_f de vaciado total: $h(t_f) = 0$.

Los valores de los parámetros h_0, v_0 son desconocidos. Para estimarlos, podemos suponer que $v_1(t)$, el módulo de la velocidad de la superficie libre, es aproximadamente constante mientras se llena el primer vaso: $v_1(0 \leq t \leq 12s) \approx v_1(t = 0) = v_0$. En esa hipótesis, durante el llenado del primer vaso se cumple:

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t \quad \text{para tiempo} \;\; t : 0 \leq t \leq 12s \tag{6}$$

Como en los primeros 12s la altura del jugo en el tanque decendió $\Delta h = \frac{h_0}{15}$ la ecuación anterior determina que $\frac{h_0}{v_0} \approx 180s$. En otras palabras, usando un modelo razonable para el vaciado del primer vaso, encontramos una relación entre dos parámetros inicialmente desconocidos.

Conviene observar que no sería razonable aplicar la Ec. (6) para todo el proceso de vaciado del tanque. Aunque no sabemos exactamente cómo es la función $v_1(t)$, podemos intuir que esa velocidad también va disminuyendo. Suponiendo que al final del proceso $v_1(t_f) = 0$, podemos aventurar dos conjeturas.

2.1. Velocidad media

Nuestro primer modelo aproximado supone que la altura del fluido en el tanque desciende con una velocidad media constante entre el valor inicial $v_1(t = 0) = v_0$ y el valor final nulo $v_1(t_f) = 0$: $\bar{v}_1 = \frac{v_0}{2}$:

$$h(t) \approx h_0 - \frac{v_0}{2} t \quad \text{para todo tiempo t} \tag{7}$$

$$h(t_f) = 0 \rightarrow t_f \approx 2\frac{h_0}{v_0} \tag{8}$$

Como la Ec. (7) es lineal, si un vaso se llena en 12s, los 15 vasos contenidos inicialmente en la jarra se vacían en $t_f = 15 \times 12s = 360s$, como confirman las ecuaciones anteriores.

2.2. Velocidad constante a tramos

Nuestro segundo modelo combina la Ec.(6) para el primer vaso y la Ec.(7) para los 14 vasos restantes, suponiendo que el primer vaso se vacía con la velocidad inicial v_0, mientras que los otros vasos lo hacen con la velocidad media $\frac{v_0}{2}$:

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t \qquad \text{para tiempo} \ \ t : 0 \leq t \leq t_1 \tag{9}$$

$$h(t) \approx h_1 - \frac{v_0}{2}\,(t - t_1) \qquad \text{para tiempo} \ \ t : t \geq t_1 \tag{10}$$

siendo $h_1 = h(t_1 = 12s) = \frac{14}{15} h_0$. Con este segundo modelo se puede estimar un tiempo total de vaciado $t_f = 348s$.

Los resultados de ambos modelos son muy similares. Podremos confirmarlos o refutarlos cuando, en la próxima sección, apliquemos la ecuación de continuidad y el principio de conservación de la energía al tanque y su orificio de salida.

3. Resolución exacta del vaciado de un tanque.

En esta sección aplicaremos el principio de conservación de la energía para determinar una ecuación que relacione magnitudes físicas no estacionarias. Bajo determinadas condiciones, dicha ecuación se asemeja a la ecuación de Bernoulli. Integrándola en el tiempo, podremos resolver de forma más exacta el problema de vaciado de un tanque.

¿Puede usarse la ecuación de Bernoulli para analizar el vaciado de un tanque?

Aplicaremos el principio de conservación de la energía. Designamos como $E_T(t)$ a la energía mecánica del fluido en el tanque y como $E_2(t)$ a la energía mecánica del fluido que sale por el orificio (punto 2). Entonces, las variaciones temporales de la energía mecánica total son iguales a la potencia que realizan las fuerzas no conservativas. En este caso, las fuerzas no conservativas se deben a las presiones en las fronteras del fluido. La presión atmosférica en la superficie libre (punto 1) realiza trabajo en el sentido del movimiento del fluido. En el orificio (punto 2) la presión atmosférica realiza trabajo en contra del fluido que sale. Debido a la ecuación de continuidad ($A_1 v_1 = A_2 v_2$), la potencia neta de estas fuerzas no conservativas es nula:

$$\frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2 = P_0\,[A_1 v_1 - A_2 v_2] = 0 \tag{11}$$

En otras palabras, la variación de la energía del fluido dentro del tanque se convierte en energía cinética del flujo de salida, considerada como flujo energético:

$$\frac{dE_T}{dt} = -\dot{E}_2 \tag{12}$$

$$\dot{E}_2 = \dot{m}_2 \frac{v_2^2}{2} = \rho A_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} \tag{13}$$

A su vez, la energía mecánica del fluido en el tanque está dada por la energía cinética y potencial de la masa $m_T(t)$. El centro de masa se encuentra en el centro del fluido de altura total $h(t)$:

$$E_T(t) = m_T(t) \left[\frac{v_1^2(t)}{2} + \frac{g h(t)}{2} \right] \tag{14}$$

Para relacionar las magnitudes del fluido en el tanque con las magnitudes del fluido en el orificio de acuerdo a la Ec.(12), es necesario derivar la Ec.(14) en el tiempo. Sin perder de vista que todas las variables y sus derivadas dependen del tiempo, tenemos[1]:

[1] Para simplificar la notación, a partir de este momento, optamos por designar las derivadas temporales con un punto aunque esa notación suele emplearse para designar flujos másicos o energéticos.

$$\frac{dE_T}{dt} = \dot{m_T}\left[\frac{v_1^2}{2} + \frac{gh}{2}\right] + m_T\left[v_1\dot{v_1} + \frac{g\dot{h}}{2}\right] \tag{15}$$

Para reducir esta expresión, conviene recordar que en la Sec.(1) deducimos que $v_1 = -\dot{h}$ y, en consecuencia, $\dot{v_1} = -\ddot{h}$. Sustituyendo estas expresiones en el penúltimo término, podemos expresar el último término de la Ec.(15) en función de la altura y sus derivadas temporales:

$$\dot{E_T} = \dot{m_T}\left[\frac{v_1^2}{2} + \frac{gh}{2}\right] + m_T\left[\dot{h}\ddot{h} + \frac{g\dot{h}}{2}\right] \tag{16}$$

Además, sabemos que $m_T(t) = \rho A_1 h(t)$ y, por lo tanto $\dot{m_T}(t) = \rho A_1 \dot{h}(t)$. Reagrupando términos, se tiene que la energía del tanque varía temporalmente según:

$$\dot{E_T} = \rho A_1 \dot{h}\left[\frac{v_1^2}{2} + \frac{gh}{2}\right] + \rho A_1 h\dot{h}\left[\ddot{h} + \frac{g}{2}\right] = \rho A_1 \dot{h}\left[\frac{v_1^2}{2} + \left(g + \ddot{h}\right)h\right] \tag{17}$$

Por último, considerando nuevamente que $v_1 = -\dot{h}$ y la Ec. (12) la ecuación de conservación de la energía se puede expresar como:

$$-\rho A_1 v_1\left[\frac{v_1^2}{2} + \left(g + \ddot{h}\right)h\right] = -\rho A_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} \tag{18}$$

la cual puede reducirse aún más cuando se aplica la ecuación de continuidad ($A_1 v_1 = A_2 v_2$) para determinar una ecuación parecida (pero no idéntica) a la ecuación de Bernoulli:

$$\left[\frac{v_1^2}{2} + \left(g + \ddot{h}\right)h\right] = \frac{v_2^2}{2} \tag{19}$$

En otras palabras, sólo si despreciamos la aceleración de la superficie libre, frente a la aceleración de la gravedad ($\ddot{h} \ll g$), el resultado que se obtiene es idéntico a la ecuación de Bernoulli entre un punto 1 y un punto 2 que se encuentran a la misma presión P_0:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh = \frac{v_2^2}{2} \tag{20}$$

¿Cuál es la ecuación diferencial que permite determinar la función $h(t)$?

A partir de la ecuación anterior, considerando nuevamente la ecuación de continuidad y que $v_1 = -\frac{dh}{dt}$ se obtiene:

$$v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) = 2gh \Rightarrow \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}h \tag{21}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -K\sqrt{h} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -Kdt \tag{23}$$

donde $K = \left[2g\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)^{-1}\right]^{1/2}$ es una constante que depende de la relación entre las secciones y la aceleración gravitatoria.

Integrando la Ec.(23) entre un tiempo $t = 0$ y un tiempo t genérico, obtenemos que:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h'}} = \int_0^t -Kdt' \Rightarrow 2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}\right) = -Kt \tag{24}$$

Despejando se obtiene una expresión de $h(t)$ que verifica:

$$\Rightarrow h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{K}{2}t\right)^2 \tag{25}$$

$$\Rightarrow h(t) = h_0\left(1 - \frac{K}{2\sqrt{h_0}}t\right)^2 \tag{26}$$

$$h(t_f) = 0 \ \rightarrow \ t_f = \frac{2\sqrt{h_0}}{K} \tag{27}$$

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^2 \tag{28}$$

Para determinar el valor t_f, usaremos la información de que el primer vaso se llena en $t_1 = 12s$ y que $h_1 = h(t = t_1) = \frac{14}{15}h_0$:

$$h_1 = h_0\left(1 - \frac{t_1}{t_f}\right)^2 \Rightarrow t_f = \frac{12}{\left(1 - \sqrt{\frac{14}{15}}\right)} = 354s \tag{29}$$

De aquí que para llenar los siguientes 14 vasos se requieran 342s, es decir 5min y 42s.

4. Discusión

La figura (2) representa $\frac{h(t)}{h_0}$ o sea la altura del jugo en la jarra como fracción de la altura inicial h_0.

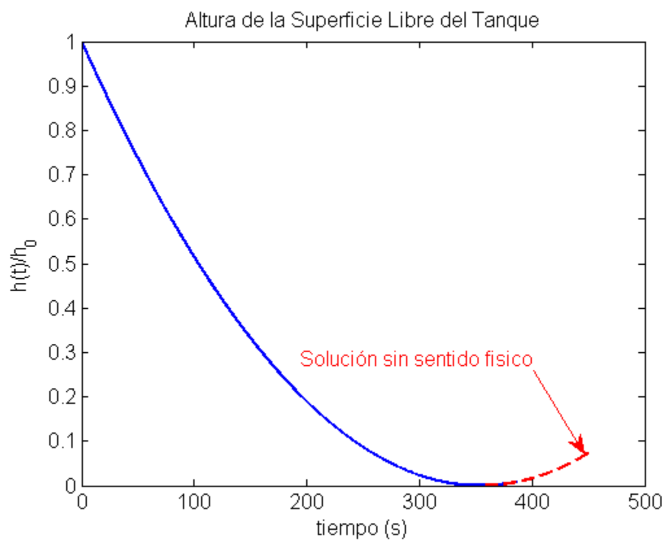

Figura 2

Como habíamos previsto en la Sec.(2) la velocidad de la superficie libre de jugo $v_1(t)$ (representada por el módulo de la derivada $\frac{dh}{dt}$) es nula al final del proceso y puede suponerse aproximadamente constante en los primeros 12s, mientras se llena el primer vaso. De hecho, $t_f = 2\frac{\sqrt{h_0}}{K} = 2\frac{h_0}{v_0}$ si se atiende al hecho de que la ecuación de Bernoulli se verifica en $t = 0$. Por lo tanto, se puede concluir que las conjeturas que se formularon en la Sec.(2) se ajustan muy bien a la solución encontrada en la Sec.(3). En particular, si $\ddot{h} \ll g$ *el tiempo que demora en vaciarse un tanque es igual al doble del tiempo que demoraría si se vaciara a una velocidad constante igual a la velocidad inicial.* Derivando la Ec.(25) se puede demostrar que se cumple la condición $\ddot{h} \ll g$ en la Ec.(19) porque $A_1 \gg A_2$.

Para finalizar, vale observar que esa condición no siempre se cumple. Si el fluido fuera descargado desde el tanque directamente a la atmósfera (y no a través de un pequeño orificio) ($A_1 = A_2 \ \rightarrow \ v_1 = v_2$) la ecuación Ec.(19) indicaría que $\ddot{h} = -g$. En esas condiciones, cada uno de los elementos del fluido se comportaría como si fuera una partícula libre sometida a la acción del campo gravitatorio.