Instituto de Física - Facultad de Ingeniería - Universidad de la República

Notas sobre ecuaciones diferenciales para el curso de Física 2

Matías Osorio Mirambell - mosorio@fing.edu.uy

3 de abril de 2018

Introducción

El presente material sobre ecuaciones diferenciales pretende ser un apoyo para los estudiantes del curso de Física 2, dictado por el Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería. Se revisará la notación utilizada, las ecuaciones más comunes que se ven en el curso y su manera de resolverlas, sin perder rigurosidad en la resolución.

Notación

A lo largo de diversos cursos, es posible haber visto distintas notaciones para las derivadas de una función. A modo de uniformizarlas, se verán las notaciones más comunes para el caso de funciones de una o más variables.

Sea en primer lugar una función y que depende solamente de una variable (por ejemplo, una distancia x). Las derivadas de dicha función se pueden escribir como:

- Derivada primera de una función $y(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y'(x)$$

- Derivada segunda de una función $y(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} = y''(x)$$

- Derivada n-ésima de una función $y(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^ny(x)}{\mathrm{d}x^n} = y^{(n)}(x)$$

Consideremos ahora una función y que depende solamente del tiempo. En cursos de mecánica, podemos encontrar que la notación de las derivadas primera y segunda de $y(t)$ respecto al tiempo, se simbolizan con puntos. Es decir:

- Derivada primera de la función $y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{y}(t)$$

- Derivada segunda de una función $y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}(t)$$

Sea ahora, una función $y(x,t)$ que depende de dos variables: una variable espacial x y una variable temporal t. En este caso, no se tendrán derivadas totales, sino que se derivará de manera *parcial* respecto a cada variable:

- Derivada parcial primera de una función $y(x,t)$ respecto a la variable x:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

- Derivada parcial primera de una función $y(x,t)$ respecto a la variable t:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

- Derivada parcial segunda de una función $y(x,t)$ respecto a la variable x dos veces:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

- Derivada parcial segunda de una función $y(x,t)$ respecto a la variable x primero, y luego respecto a t:

$$\frac{\partial \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Una ecuación diferencial es una ecuación que vincula una función f (que puede ser de una o más variables) con sus derivadas. En este curso sólo se trabajará con *ecuaciones diferenciales ordinarias*, es decir, con ecuaciones de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = F\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right) \tag{1}$$

La Ec. (1) nos dice que la derivada n-ésima de una función $y(t)$ es función (la relación funcional es simbolizada por F) de las $n-1$ derivadas anteriores, de la propia función $y(t)$, y de la variable temporal t. Esto no implica que necesariamente tengan que estar vinculadas todas las derivadas. Por ejemplo, la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve bajo un movimiento armónico simple sin disipación de energía es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 y(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y(t) = 0 \tag{2}$$

La Ec. (2) vincula la derivada segunda de la posición $y(t)$ con la propia posición, y no interviene en ningún momento la derivada primera (o mayores).

Se define el *orden de una ecuación diferencial* como el grado de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial. Por ejemplo, la Ec. (2) es una ecuación diferencial de segundo orden, dado que derivada de mayor que interviene es la de segundo orden.

Ecuación diferencial lineal

Supongamos que se puede rescribir la Ec. (1) de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(t)\frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} + \alpha_0(t)y(t) + g(t) \tag{3}$$

La Ec. (3) se denomina *ecuación diferencial lineal*. Esto se debe a que la relación entre las derivadas de la función $y(t)$ y la propia función, es una combinación lineal con coeficientes $\alpha_i(t)$[1]. El término $g(t)$ define si la ecuación es *homogénea* o *no homogénea*:

- si $g(t) = 0$, entonces la ecuación lineal es *homogénea*.
- si $g(t) \neq 0$, entonces la ecuación lineal es *no homogénea*.

Un ejemplo de una ecuación diferencial lineal homogénea es la presentada en la Ec. (2). Aquí el coeficiente $\alpha_0(t) = -\omega^2$ y $g(t) = 0$.

Resolución de una EDO lineal

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a coeficientes constantes, definida como:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha y(t) = 0 \tag{4}$$

La Ec. (4) es posible resolverla mediante el método de *variables separables*. En este método, la solución se encuentra separando todos los términos que dependen de $y(t)$ de los que dependen de t en cada lado de la igualdad, como se muestra a continuación:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha y(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y(t)}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha$$

[1] En este curso se trabajará con los coeficientes α_i constantes, es decir, $\alpha_i(t) = \alpha_i$.

Integrando en ambos lados respecto al tiempo (de modo de mantener la igualdad):

$$\int \frac{1}{y(t)} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int -\alpha \ \mathrm{d}t \tag{5}$$

Por otro lado, de la diferenciación de la función $y(t)$, se puede establecer que[2]:

$$\mathrm{d}y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{6}$$

Por lo que sustituyendo (6) en (5) se obtiene:

$$\int \frac{\mathrm{d}y(t)}{y(t)} = \int -\alpha \ \mathrm{d}t \tag{7}$$

Para resolver completamente la ecuación diferencial es necesario dar *condiciones de borde* o *condiciones iniciales* del problema. Esto es, la situación del sistema bajo estudio en, por ejemplo, el instante inicial $t = 0$.

Supongamos que la condición inicial de nuestro problema de ejemplo es $y(0) = y_0$. La integración (y posterior resolución) queda:

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y(t)}{y(t)} = -\alpha \int_0^t \ \mathrm{d}t \Rightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) = -\alpha t \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 \exp(-\alpha t)} \tag{8}$$

¿Qué sucede si la ecuación diferencial no es homogénea?. Es decir, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha y(t) = g(t) \tag{9}$$

Es posible demostrar, que la función solución $y(t)$ que verifica la Ec. (9) tiene una componente derivada de la ecuación diferencial homogénea más otra no homogénea (denominada solución *particular*). Es decir, $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$. Por lo tanto para resolver la ecuación hay que seguir los siguientes pasos:

1. Primero, hallar $y_H(t)$, imponiendo en la Ec. (9), $g(t) = 0$, y sin imponer condiciones iniciales, o sea, dejar el problema en función de las constantes de integración que aparecen al integrar.

2. Segundo, hallar $y_P(t)$, a partir de la ecuación no homogénea. Este punto se puede resolver mediante testeo, imponiendo que la solución $y_P(t)$ es similar a la función $g(t)$.

3. Una vez formada la solución $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, se imponen las condiciones iniciales del problema, para determinar las constantes de integración correspondientes.

A continuación veremos algunos ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales utilizadas en el curso de Física 2.

Ejemplos

Variación de la presión de un fluido incompresible respecto a la altura

Es posible demostrar que la ecuación diferencial que gobierna la variación de presión P dentro de un fluido de densidad ρ, respecto a la altura y es:

$$\frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}y} = -\rho g \tag{10}$$

La Ec. (10) es una ecuación diferencial similar a la Ec. (4), por lo que es posible resolverla mediante el método de variables separables. La diferenciación de la función $P(y)$ da que:

$$\mathrm{d}P(y) = \frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y \tag{11}$$

[2] Si bien este paso puede parecer trivial (y hasta redundante), no se debe confundir el concepto de derivada con el de diferencial de una función.

Por lo que integrando la Ec. (10) respecto a la altura y en ambos lados, y sustituyendo con lo visto en la Ec. (11):

$$\int \frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \int -\rho g \;\mathrm{d}y \Rightarrow \int \mathrm{d}P(y) = -\rho g \int \mathrm{d}y \tag{12}$$

Suponiendo que la presión del fluido a una altura y_1 es $P(y_1)$, y a una altura y_2 es $P(y_2)$, entonces las integrales quedan definidas como:

$$\int_{P(y_1)}^{P(y_2)} \mathrm{d}P(y) = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \Rightarrow \boxed{P(y_2) - P(y_1) = -\rho g(y_2 - y_1)} \tag{13}$$

Ecuación diferencial del vaciado no estacionario de un tanque

El vaciado no estacionario de un tanque que contiene un fluido, se gobierna mediante la siguiente ecuación diferencial, que vincula la altura $h(t)$ de la superficie del fluido con el tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -K\sqrt{h(t)} \tag{14}$$

La constante K que aparece en la Ec. (14), es una constante que depende de la aceleración gravitatoria g y de las dimensiones del tanque. Siguiendo los pasos anteriores, despejando las distintas variables a cada lado de la igualdad, e integrando en el tiempo a ambos lados:

$$\int \frac{1}{\sqrt{h(t)}}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int -K\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

La diferenciación de la función $h(t)$ nos da que:

$$\mathrm{d}h(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

Sustituyendo la Ec. (16) en la Ec. (15) se obtiene que:

$$\int \frac{\mathrm{d}h(t)}{\sqrt{h(t)}} = -K\int \mathrm{d}t \tag{17}$$

Supongamos que se quiere determinar el tiempo t^* en el cual el tanque se vacía (es decir, $h(t^*) = 0$). Asumamos que el problema tiene como condición inicial que en el tiempo inicial $t = 0$, la altura posee un valor h_0. Imponiendo todo esto en las integrales de la Ec. (17), obtenemos el tiempo de vaciado t^*:

$$\int_{h(0)}^{h(t^*)} \frac{\mathrm{d}h(t)}{\sqrt{h(t)}} = -K\int_0^{t^*} \mathrm{d}t \Rightarrow 2\left(\underbrace{\sqrt{h(t^*)}}_{0} - \underbrace{\sqrt{h(0)}}_{\sqrt{h_0}}\right) = -Kt^* \Rightarrow \boxed{2\sqrt{h_0} = Kt^*} \tag{18}$$

Ecuación diferencial de una partícula sometida a un movimiento armónico simple

Supongamos el corcho sumergido del problema 3.6 del Práctico 3. La ecuación de movimiento del corcho (teniendo en cuenta la coordenada y presentada en el problema) está dada por:

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{gA\rho_a}{m}y(t) = g \tag{19}$$

La Ec. (19) es una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden. Sabemos que la solución $y(t)$ está dada por la suma de una solución dada por la ecuación homogénea, más una parte correspondiente a la solución particular.

Calculemos en primer lugar la solución homogénea $y_H(t)$. Es posible demostrar, que la función $y_H(t) = y_o\sin(\omega t + \phi)$ es la solución general de la ecuación homogénea.

Calculemos ahora la solución $y_P(t)$ correspondiente a la solución particular. En el caso de la Ec. (19), la función $g(t)$ es una constante que vale la aceleración gravitatoria g. Impongamos que la función $y_P(t) = \alpha$, es decir la solución particular es una constante de valor α a determinar. La determinación de α se puede realizar verificando la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_P(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{gA\rho_a}{m} y_P(t) = g \Rightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}}_{0} + \frac{gA\rho_a}{m}\alpha = g \Rightarrow y_P(t) = \alpha = \frac{m}{A\rho_a}$$

La solución general de la Ec. (19) hasta el momento es:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = y_o \sin(\omega t + \phi) + \frac{m}{A\rho_a} \tag{20}$$

En este punto es necesario determinar las constantes y_o y ϕ. Para ello hacemos uso de las condiciones iniciales del problema. Supongamos que el problema plantea que en el instante $t = 0$, la posición del corcho es su posición de equilibrio ($y(0) = y_{\text{eq}} = m/A\rho_a$) y tiene cierta velocidad inicial ($\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = v_0$, en $t = 0$). Operando:

- $y(0) = y_o \sin(\phi) + \frac{m}{A\rho_a} = y_{\text{eq}} \Rightarrow \boxed{\phi = 0}$
- $\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = y_o \omega \cos(\phi) = v_0 \Rightarrow \boxed{y_o = \frac{v_0}{\omega}}$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{m}{A\rho_a}, \quad \omega = \sqrt{\frac{gA\rho_a}{m}}}$$