

Física 2 – Segundo Parcial – Solución 13 de Julio de 2021

Ejercicio 1 (17 puntos)

En un calorímetro se introduce 500 g de agua a 60°C y 1 kg de un sólido desconocido a 20°C . Al pasar el tiempo, se observa que la temperatura final del equilibrio térmico es de 50°C . Recuerde que $0^\circ\text{C} = 273,15\text{K}$.

a) Halle el calor específico del sólido.

Luego se introduce 100 g de hielo a -5°C .

b) Determine la temperatura final de equilibrio.

c) Bosqueje la temperatura de la masa hielo en función del calor recibido, indicando expresamente las coordenadas de los puntos.

d) Calcule la variación de entropía del sistema durante todo el proceso.

Suponga que el sólido desconocido no experimenta ningún cambio de fase.

Datos útiles:

$$c_{\text{agua}} = 4182 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad ; \quad c_{\text{hielo}} = 2090 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad ; \quad l_{\text{fusión}} = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Solución:

a) El calor liberado por el agua es absorbido por el sólido:

$$Q_s = -Q_a \rightarrow c_s m_s (T_{eq} - T_s) = -c_a m_a (T_{eq} - T_a) \rightarrow c_s = \frac{-c_a m_a (T_{eq} - T_a)}{m_s (T_{eq} - T_s)} \rightarrow c_s = 697 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

b) El calor liberado por el agua y el sólido para llegar a 0°C es:

$$Q_a + Q_s = c_a m_a (273,15\text{K} - T_{eq}) + c_s m_s (273,15\text{K} - T_{eq}) = -139400\text{J}$$

El calor absorbido por la masa de hielo para llegar a 0°C y derretirse completamente es:

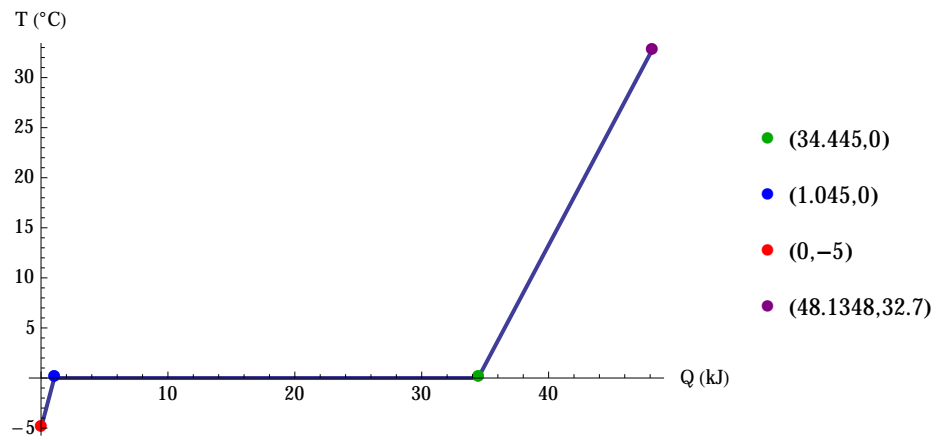
$$Q_h = c_h m_h (273,15\text{K} - T_h) + m_h l_{\text{fusión}} = 34445\text{J}$$

$$|Q_a + Q_s| > |Q_h| \text{ entonces } T_f > 273,15\text{K}$$

$$c_a m_a (T_f - T_{eq}) + c_s m_s (T_f - T_{eq}) + c_h m_h (273,15\text{K} - T_h) + m_h l_{\text{fusión}} + c_a m_h (T_f - 273,15\text{K}) = 0$$

$$T_f = \frac{-c_h m_h (273,15\text{K} - T_h) - m_h l_{\text{fusión}} + c_a m_a T_{eq} + c_s m_s T_{eq} + c_a m_h (273,15\text{K})}{c_a m_a + c_s m_s + c_a m_h} = 305,9\text{K} = 32,7^\circ\text{C}$$

c) El bosquejo es:



d)

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_s + \Delta S_h = 24,6 J/K$$

$$\Delta S_a = c_a m_a \log\left(\frac{T_f}{T_a}\right) = -178,5 J/K \quad , \quad \Delta S_s = c_s m_s \log\left(\frac{T_f}{T_s}\right) = 29,6 J/K$$

$$\Delta S_h = c_h m_h \log\left(\frac{273,15 K}{T_h}\right) + \frac{m_h l_{fusión}}{273,15 K} + c_a m_h \log\left(\frac{T_f}{273,15 K}\right) = 173,5 J/K$$

Ejercicio 2 (16 puntos)

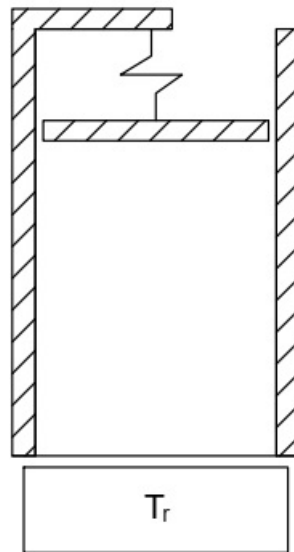
El recipiente mostrado en la figura tiene un volumen $V = 0,02 \text{ m}^3$, una sección transversal $A = 60 \text{ cm}^2$ y en la parte superior está abierto a la atmosfera. Sus paredes laterales son adiabáticas y la inferior es diaterma. Un pistón, también adiabático, de masa despreciable encierra en la parte inferior un gas ideal monoatómico. Inicialmente el gas ocupa un volumen de $V_i = 0,015 \text{ m}^3$ y tiene una temperatura de $T_i = 600 \text{ K}$. De la tapa superior del recipiente cuelga un resorte de constante elástica $k = 4000 \text{ N/m}$ que está acoplado al pistón y que no hace fuerza si este se encuentra a la mitad del recipiente. El pistón puede moverse libremente.

Se coloca el gas en contacto con una reserva térmica de $T_r = 300 \text{ K}$, y se deja que el sistema llegue al equilibrio. Suponiendo que el proceso es cuasiestático:

- Calcule la presión inicial del sistema y el número de moles dentro del recipiente.
- Determine el estado de equilibrio final.
- Bosqueje el proceso en un diagrama P-V.
- Calcule el trabajo realizado por el gas sobre el ambiente y el calor transferido.

Datos útiles:

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad ; \quad R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$



Solución:

- Haciendo un estudio de fuerzas aplicadas al pistón hallamos que:

$$P(V) = \frac{k(V - V_0)}{A^2} + P_0 \quad (1)$$

donde V_0 es el volumen que debe tener el gas para que el resorte no esté ni estirado ni comprimido y P_0 la presión atmosférica. Con la ecuación (1) y la ecuación de estado del gas ideal se determina la presión y el número de moles iniciales, tal que:

$V_i(m^3)$	$T_i(K)$	$P_i(kPa)$	$n(mol)$
0,015	600	656,9	1,98

- b) Como el sistema entra en contacto con una reserva térmica a temperatura T_r , en el estado de equilibrio final el gas tendrá esa misma temperatura ($T_f = 300 K$). Entonces, usando la ecuación 1 y la ecuación para gases ideales, tendremos:

$$\frac{nRT_f}{V_f} = P_0 + \frac{k(V_f - V_0)}{A^2} \quad (2)$$

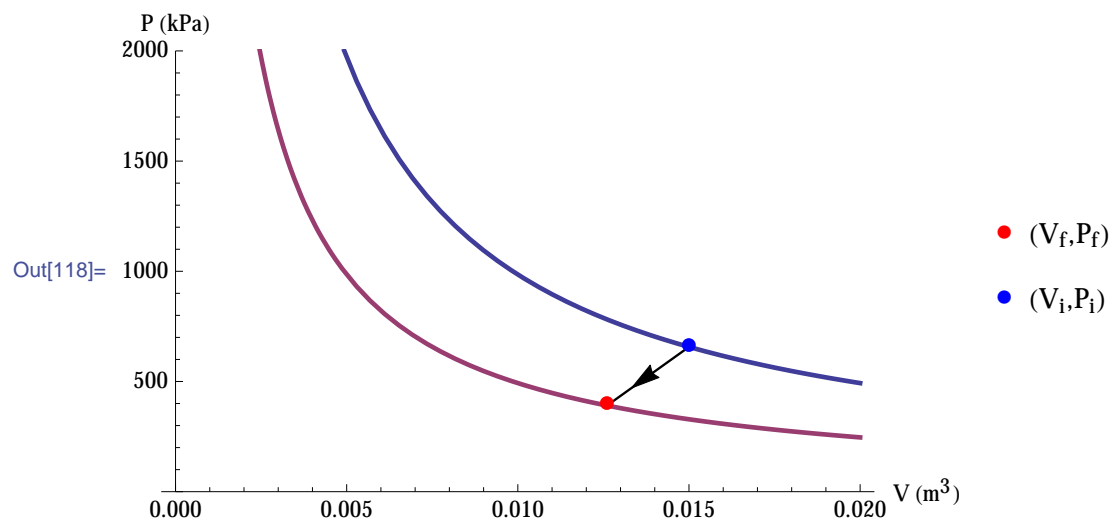
Que simplificamos a:

$$-nRT_f + \left(P_0 - \frac{k}{A^2}V_0\right)V_f + \frac{k}{A^2}V_f^2 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo orden obtenemos el volumen final. Luego, usando la ecuación de gases ideales calculamos la presión. El estado final nos queda:

$V_f(m^3)$	$T_f(K)$	$P_f(kPa)$
0,0126	300	390,8

- c) El diagrama P-V es:



- d) Para calcular el trabajo integramos la ecuación (1)

$$W = (V_f - V_i) \left(P_0 - \frac{kV_0}{A^2} \right) + \frac{k}{2A^2} (V_f^2 - V_i^2)$$

Para el calor podemos usar el primer principio, por lo que calculamos la energía interna primero. Para obtener la energía interna usamos que es una función de estado y la calculamos usando un proceso isocoro del estado (V_i, P_i) hasta la isoterma de T_f y luego un proceso isoterma. Nos queda

$$\Delta U = n C_v (T_f - T_i)$$

para el proceso isocoro y en el proceso isoterma no hay variación de energía interna para gases ideales. Como el gas es monoatómico $C_v = \frac{3R}{2}$. Finalmente:

$W(J)$	$\Delta U(J)$	$Q(J)$
-1254	-7390	-8644

Ejercicio 3 (10 puntos)

Un sistema de calefacción para el hogar opera como una bomba de calor dada por el ciclo de Carnot. El calor se absorbe del suelo mediante tubos enterrados y se entrega al hogar a una temperatura más alta. Si se utiliza un ciclo de Carnot de este modo operando con reservorios térmicos de 0°C y 20°C :

- ¿Cuántos Joules de calor por segundo se suministran al hogar por cada Watts de energía eléctrica necesarios para operar la máquina?
- Si el hogar pierde calor por las aberturas a razón de $\alpha(T - T_0)$, con α constante, siendo T la temperatura interior del hogar y T_0 la temperatura del reservorio frío. Mostrar que la temperatura de equilibrio del hogar $T = T_e$ viene dada por

$$T_e = T_0 + \frac{\mathcal{P}}{2\alpha} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4T_0\alpha}{\mathcal{P}}} \right],$$

donde \mathcal{P} es la potencia eléctrica (constante) entregada para operar la máquina.

Solución:

- Al ser un ciclo de Carnot, la entropía del universo permanece constante y la relación entre el calor $|Q_2|$ cedido a la temperatura más alta T se relaciona con el calor absorbido Q_1 a la temperatura más baja T_0 por:

$$\frac{|Q_2|}{T} = \frac{|Q_1|}{T_0},$$

donde es importante expresar las temperaturas en K . La eficiencia de esta bomba de calor será la ganancia, calor entregado a T , sobre el trabajo realizado para hacer funcionar la bomba térmica $W = |Q_2| - |Q_1|$. Es decir que la eficiencia η es, efectivamente, lo que debemos hallar:

$$\eta = \frac{|Q_2|}{W} = \frac{|Q_2|}{|Q_2| - |Q_1|} = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T}} \sim 14,66.$$

Es decir, el hogar recibe calor a razón de $14,66 \text{ kW}$ por cada kW de potencia eléctrica necesario para hacer funcionar la máquina.

- Ahora supongamos que además de funcionar como antes, el hogar pierde calor por sus ventanas a razón de $|\dot{Q}_{out}| = \alpha(T - T_0)$ con T la temperatura del interior del hogar (es decir, la fuente caliente del sistema anterior) y T_0 la temperatura exterior (y de la fuente fría de la parte anterior). El flujo de calor por unidad de tiempo hacia el hogar será:

$$\dot{Q} = -|\dot{Q}_{out}| + \dot{Q}_2.$$

Pero $\dot{Q}_2 = \eta\mathcal{P}$, por lo que:

$$\dot{Q} = -\alpha(T - T_0) + \frac{T\mathcal{P}}{T - T_0}.$$

Si el sistema está en equilibrio, entonces $\dot{Q}|_{T_e} = 0$ y por tanto será:

$$0 = -\alpha(T_e - T_0) + \frac{T_e\mathcal{P}}{T_e - T_0} = -\frac{\alpha(T_e - T_0)^2 - T_e\mathcal{P}}{T_e - T_0}.$$

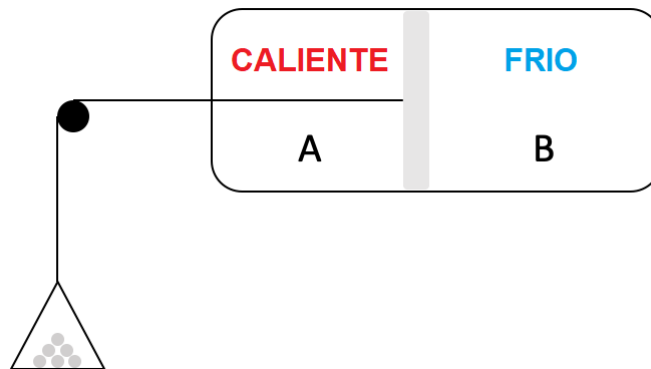
Esta relación se satisface si el numerador se anula y por tanto, la temperatura de equilibrio corresponde a una de las raíces del polinomio de segundo orden en T_e que tiene por solución (ser $T_e > T_0$):

$$T_e = T_0 + \frac{\mathcal{P}}{2\alpha} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4T_0\alpha}{\mathcal{P}}} \right].$$

Ejercicio 4 (17 puntos)

Consideremos un gas ideal contenido en un recipiente cilíndrico cerrado separado en dos partes, A y B , mediante un émbolo que pueda moverse sin rozamiento en la dirección del eje horizontal del cilindro (ver figura) pero que inicialmente se encuentra fijado. Tanto el recipiente como el émbolo están hechos de un material adiabático. A través de un orificio en una de las paredes laterales del cilindro se hace pasar una cuerda que se amarra al émbolo en un extremo y, a través de una polea, a un platillo de balanza en el otro, que cuelga verticalmente. El orificio no permite pasar nada más que el hilo. El gas en el compartimiento A tiene una temperatura $T_A = 450^\circ\text{C}$ mientras que el del compartimiento B tiene una temperatura $T_B = 350^\circ\text{C}$. Además, la densidad del gas en ambos compartimientos es la misma.

En un momento se libera el émbolo y la diferencia de presiones tenderá a mover el émbolo hacia la derecha. Supondremos que, en todo momento, el platillo contiene la masa necesaria para compensar dicha diferencia, salvo por un infinitésimo que permitirá la realización de un trabajo contra el campo gravitatorio, elevando el platillo con infinita lentitud (es decir, un proceso cuasi-estático).



- Determinar el cociente entre el trabajo realizado al levantar el platillo y la energía interna perdida por el sistema A durante una expansión infinitesimal $dV_A > 0$. Escribir el resultado en termino de las temperaturas dadas.
- ¿Es el proceso estudiado reversible? Explicar.
- ¿Cuáles son los cambios en las entropías de A y B durante este proceso?
- ¿Qué importante ciclo termodinámico tiene como eficiencia la calculada en la parte anterior?

SOLUCIONES

- Solución apartado (a)

Estamos interesados en calcular el trabajo, W , realizado al levantar el platillo en comparación con la energía perdida por el sistema A durante su expansión.

Calculemos, pues, el trabajo realizado en el proceso de compresión infinitesimal del gas en B . Tendremos:

$$W_B = dU_B = P_B dV_B = -\frac{n_B R T_B}{V_B} dV_B \quad (1)$$

Para el gas A escribimos la expresión análoga

$$W_A = dU_A = P_A dV_A = -\frac{n_A R T_A}{V_A} dV_A \quad (2)$$

Nótese que $dV_B = -dV_A$, ya que $V_A + V_B$ es constante. Como $dV_A > 0$, el cambio en la energía interna de A , dU_A , será negativo (es el sistema A el que cede su energía) y dU_B será positivo.

El cambio total en la energía de ambos gases será

$$dU = dU_A + dU_B = -R \left(\frac{n_A}{V_A} T_A - \frac{n_B}{V_B} T_B \right) dV_A = -RD(T_A - T_B) dV_A \quad (3)$$

Donde hemos definido la densidad de partículas $D = \frac{n_A}{V_A} = \frac{n_B}{V_B}$, igual, por construcción, para el gas en A y en B . Esta energía perdida, dU , es, por supuesto, empleada en realizar el trabajo de levantar el platillo con sus masas.

Veamos cuál es el cociente pedido:

$$\frac{dU}{dU_A} = \frac{-RD(T_A - T_B) dV_A}{-RDT_A dV_A} = \frac{T_A - T_B}{T_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A} \quad (4)$$

Aplicamos esta fórmula para $T_A = 450^\circ C$ y $T_B = 350^\circ C$. Para ello escribimos las temperaturas en la escala Kelvin, $T_A = (450 + 273)K = 723K$ y $T_B = (350 + 273)K = 623K$. Tendremos entonces

$$1 - \frac{T_B}{T_A} = 1 - \frac{623}{723} = 0.138 \quad (5)$$

Es decir, sólo un 13.8 % de la energía extraída de A es empleada en levantar el platillo.

- Solución apartado (b)

El proceso es reversible, ya que un cambio infinitesimal en la masa depositada en el platillo invertiría el sentido del mismo, devolviendo ambos gases a sus estados iniciales.

- Solución apartado (c)

Ambos gases están aislados adiabáticamente y realizan procesos cuasiestáticos. No se produce, por tanto, ningún cambio en sus respectivas entropías y, en consecuencia, la entropía total permanece constante también. Se trata de un proceso isoentrópico.

- Solución apartado (d)

La fórmula derivada en el apartado (a) es idéntica a la que da la eficiencia de una máquina de Carnot operando entre las temperaturas T_A y T_B . Nótese, sin embargo, que el proceso analizado no es un ciclo termodinámico.