

Física 2 – Soluciones del Segundo Parcial

Ejercicio 1

a) Partiendo de la primera ley para un proceso diferencial en una sustancia compresible (considerando solo trabajo de frontera),

$$dU = \delta Q + \delta W$$

con $\delta W = -PdV$ y $\delta Q = TdS$ (def. de entropía, proceso internamente reversible) resulta

$$TdS = dU + PdV = n\tilde{c}_V dT + PdV$$

Se ha usado $dU = n\tilde{c}_V dT$ para un gas ideal. Además, con $PV = nRT$, resulta $P/T = nR/V$ por lo que

$$dS = n\tilde{c}_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S = \int_{S_i}^{S_f} dS = \Delta S = n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

La entropía es una variable de estado, por lo que la relación obtenida para un proceso internamente reversible describe el cambio de entropía entre estados (i) y (f), cualquiera sea el proceso.

b) Estado inicial:

	O ₂	He
volumen	$\frac{3}{4}V_0$	$\frac{1}{4}V_0$
presión	$3P_0$	P_0
temperatura	T_0	$\frac{1}{9}T_0$

Llamamos (A) al Oxígeno y (B) al Helio. La temperatura de B se obtiene de la condición de igual número de partículas en recintos A y B,

$$N = \frac{P_A V_A}{kT_A} = \frac{P_B V_B}{kT_B} \Rightarrow T_B = T_A \frac{P_B V_B}{P_A V_A} = \frac{1}{9}T_0$$

Estado final:

	O ₂	He
volumen	$\frac{1}{2}V_0$	$\frac{1}{2}V_0$
presión	$3P_0$	$3P_0$
temperatura	$\frac{2}{3}T_0$	$\frac{2}{3}T_0$

Los gases no se mezclan. Presión y temperatura son las mismas en A y B (tabique libre y diatermo). Por tanto,

$$V'_A = \frac{NkT'_A}{P'_A} = \frac{NkT'_B}{P'_B} = V'_B$$

y los volúmenes son iguales. Como su suma es V_0 , resulta $V'_A = V'_B = V_0/2$.

De la primera ley se obtiene la temperatura T' , con calores específicos $c_{V,A} = \frac{5}{2}k$ y $c_{V,B} = \frac{3}{2}k$,

$$\Delta U_A + \Delta U_B = \frac{5}{2}Nk(T' - T_A) + \frac{3}{2}Nk(T' - T_B) = 0 \Rightarrow T' = \frac{2}{3}T_0$$

La presión no es necesaria, pero se obtiene fácilmente: $P' = NkT'/V'_A = 3P_0$. El cambio de entropía del universo es la suma de los cambios en ambos gases, ya que el ambiente no participa del proceso.

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= \frac{5}{2}Nk \ln\left(\frac{T'}{T_A}\right) + Nk \ln\left(\frac{V'_A}{V_A}\right) = \frac{5}{2}Nk \ln\left(\frac{2}{3}\right) + Nk \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -1,42 Nk \\ \Delta S_B &= \frac{3}{2}Nk \ln\left(\frac{T'}{T_B}\right) + Nk \ln\left(\frac{V'_B}{V_B}\right) = \frac{3}{2}Nk \ln(6) + Nk \ln(2) \approx 3,38 Nk \\ \Delta S_{univ} &= \Delta S_A + \Delta S_B \approx 1,96 Nk \end{aligned}$$

en términos de los datos, $Nk = P_A V_A / T_A = \frac{9}{4}P_0 V_0 / T_0$, por tanto $\Delta S_{univ} \approx 4,41 P_0 V_0 / T_0$.

c) **Estado final:**

	O ₂	He
volumen	V ₀	V ₀
presión parcial	$\frac{3}{2}P_0$	$\frac{3}{2}P_0$
temperatura	$\frac{2}{3}T_0$	$\frac{2}{3}T_0$

Los gases ahora se mezclan. Temperatura y volumen son los mismos, pero hay dos presiones parciales debidas a moléculas de A y de B. Su suma es la presión en el recinto. El volumen visto por ambas moléculas (A y B) es $V'' = V_0$. La temperatura es la misma que en (a), de la primera ley: $T'' = \frac{2}{3}T_0$.

$$P''_A = \frac{NkT''}{V_0} = P''_B = \frac{3}{2}P_0$$

la presión total en el recinto es $P'' = P''_A + P''_B = 3P_0$ como en (a).

El cambio de entropía en ambos gas se calcula como antes, pero usando los nuevos estados finales de las moléculas de cada gas,

$$\Delta S_A = \frac{5}{2}Nk \ln\left(\frac{T''}{T_A}\right) + Nk \ln\left(\frac{V_0}{V_A}\right) = \frac{5}{2}Nk \ln\left(\frac{2}{3}\right) + Nk \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0,73 Nk$$

$$\Delta S_B = \frac{3}{2}Nk \ln\left(\frac{T''}{T_B}\right) + Nk \ln\left(\frac{V_0}{V_B}\right) = \frac{3}{2}Nk \ln(6) + Nk \ln(4) \approx 4,07 Nk$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_A + \Delta S_B \approx 3,34 Nk$$

en términos de los datos $\Delta S_{univ} \approx 7,52 P_0V_0/T_0$.

Es esperable que se genere mas entropía que antes debido a que la mezcla de los dos gases es un proceso irreversible.

Ejercicio 2

a) Usando $PV^\gamma = cte$ para un proceso adiabático en un gas ideal, calculamos

$$B_s = -V \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_S = \gamma P$$

donde $\gamma = c_P/c_V = 1,40$ para el aire (gas diatómico). Usando $P = \rho R_g T$ resulta

$$v_s = \sqrt{\gamma R_g T} \approx 389 \text{ m/s.}$$

donde $R_g = R/w = 287 \text{ J/kg K}$ es la constante del gas para el aire y se usó $T = PV/nR = 376 \text{ K}$.

b) En los extremos del tubo cerrado hay nodos de desplazamiento o *antinodos de presión*. Las longitudes de onda estacionarias satisfacen, $\lambda_n = 2L/n$ con $n = 1, 2, 3 \dots$. Usando $\lambda_n f_n = v_s$, la frecuencia fundamental es $f_1 = v_s/2L \approx 194,5 \text{ Hz}$ y el primer armónico es $f_2 = 2f_1 \approx 389 \text{ Hz}$.

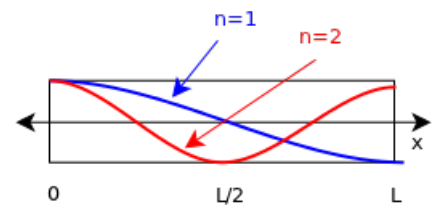
c) Superponiendo las oscilaciones de presión,

$$\Delta P_1(x, t) = \frac{\Delta P_m}{2} \sin(kx - \omega t), \quad \Delta P_2(x, t) = \frac{\Delta P_m}{2} \sin(kx + \omega t)$$

se obtiene la onda estacionaria en el tubo

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \Delta P_m \cos(kx) \sin(\omega t).$$

Esta onda tiene antinodos en $x = 0$ y $x = L$ si $k_n = n\pi/L$ con $n = 1, 2, 3 \dots$ o $\lambda_n = 2L/n$ como en (b).



d) La potencia acústica es proporcional al producto de la sobrepresión ΔP y de la velocidad de desplazamiento longitudinal $v_x = \partial s / \partial t$. Ya que $\Delta P \propto \partial s / \partial x$, resulta $s = s_m \sin(kx) \sin(\omega t)$ y $v_x \propto \sin(kx) \cos(\omega t)$. La potencia en el tubo es $A \Delta P \times v_x \propto \sin(2kx) \sin(2\omega t)$. Para $k = k_1 = \pi/L$, los puntos de máxima potencia acústica son $x = L/4$ y $x = 3L/4$. La potencia es nula (para todo t) en $x = 0$, $x = L/2$ y $x = L$.

Pregunta 1

Corolario de Carnot: *No existe máquina térmica más eficiente que una máquina reversible entre las mismas temperaturas.* Se demuestra por reducción al absurdo: si existe una máquina térmica más eficiente que una máquina reversible entre las mismas temperaturas, la puedo usar para mover la máquina reversible como bomba de calor y reponer el calor extraído de la reserva de alta temperatura en cada ciclo. En ese caso, debido a la diferencia de eficiencias, sobra trabajo al ambiente y el conjunto solo intercambia calor con la reserva de baja temperatura. Esto viola la Segunda Ley en su formulación de Kelvin-Planck.

Pregunta 2

La radiación absorbida por la placa es αG por lo que el balance térmico por unidad de área es:

$$\alpha G = \sigma \epsilon T^4 + h(T - T_\infty)$$

Según la ley de Kirchoff, $\alpha = \epsilon$. Usando $T = 60^\circ\text{C} = 333\text{ K}$ y $\alpha = \epsilon = 0,50$ resulta

$$h_{min} = \frac{\epsilon(G - \sigma T^4)}{T - T_\infty} \approx 4.3\text{ W/m}^2\text{K}.$$

Pregunta 3

Los submarinos se acercan, las frecuencias percibidas aumentan por efecto Doppler. El submarino B percibe (y emite) una frecuencia

$$f' = f \left(\frac{v + v_B}{v - v_A} \right)$$

el submarino A percibe una frecuencia (eco de B)

$$f'' = f' \left(\frac{v + v_A}{v - v_B} \right) = f \left(\frac{v + v_B}{v - v_A} \right) \left(\frac{v + v_A}{v - v_B} \right) = 1030 \times 1,035 \times 1,007 \approx 1074\text{ Hz}.$$

Pregunta 4

- a) En 10 minutos se derriten $m_h = 4\text{ kg}$ de hielo. Como las temperaturas en los extremos de la barra permanecen constantes el calor se transfiere a tasa constante, $\dot{Q} = \Delta T/R$. Esta tasa es

$$\dot{Q} = \frac{m_h \ell}{10 \times 60} \approx 2.22\text{ kW}$$

siendo $\ell = 333\text{ kJ/kg}$ el calor latente del hielo. La resistencia térmica de la barra, $R = L/kA$, es

$$R = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{200}{2,2} \approx 90.1\text{ K/kW}$$

por lo que la conductividad térmica de la barra es $k = L/RA \approx 11.1\text{ kW/mK}$.

- b) La barra no cambia de estado en el proceso, por lo tanto su entropía no cambia. La variación de entropía del universo se debe a la transferencia de calor Q entre la reserva y el agua:

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_R + \Delta S_a = \frac{-Q}{T_R} + \frac{Q}{T_a} = Q \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_R} \right) \approx 2.06\text{ kJ/K}$$

donde $Q = m_h \ell \approx 1332\text{ kJ}$, $T_R = 473\text{ K}$ y $T_a = 273\text{ K}$.