Física 2 - Solución del Examen
Período Julio-2011

22 de julio de 2011

Ejercicio 1

(a)

La imagen mostrada representa una onda viajera $y(x,t) = f(x - vt)$ en un instante $t = t'$ fijo, siendo v la velocidad de las ondas en la cuerda. Con la tensión T y la densidad de masa lineal de la cuerda, $\mu = M/L$, el valor de la velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{TL}{M}} = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N} \times 12.5\,\mathrm{m}}{5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Kg}}} = 447.2\,\mathrm{m/s}$$

Usemos la siguiente numeración para los puntos en $t = t'$:

punto	x(m)	y(mm)
1	5.0	0
2	5.2	5
3	5.6	5
4	6.0	0

Se pide representar el desplazamiento en el origen, o sea

$$y(x = 0, t) = f(-vt)$$

Como se conocen los valores de $f(u)$ en los puntos $u = x - vt'$, pero los precisamos en $u = -vt$, planteamos

$$x - vt' = -vt \rightarrow t - t' = -\frac{x}{v}$$

Es decir, a cada valor de x de la gráfica original, corresponde un valor de t en la gráfica pedida, con el mismo desplazamiento vertical. Aún no queda determinado t', pero sabemos que en $t = 0$ comienza el movimiento. El punto inicial corresponde al extremo derecho del pulso. Los intervalos de tiempo pueden escribirse en función de los intervalos de posición como

$$\Delta t_{1,2} = t_1 - t_2 = \frac{x_2 - x_1}{v}$$

y así sucesivamente. Obsérvese que el orden de los puntos en el tiempo está invertido con respecto a los de posición.

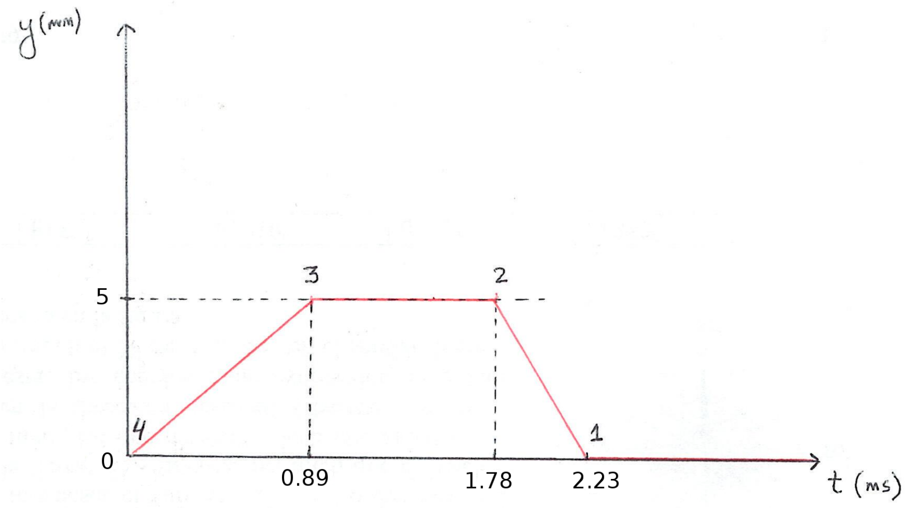
Otra manera de hallar este resultado de forma inmediata es usar que $y(x,t) = f(x - vt)$, y por lo tanto se cumple la propiedad

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -v\frac{\partial y}{\partial t},$$

lo que significa que la pendiente la gráfica y vs t es la misma que la pendiente de la de y vs x, mediante división por $-v$.

Los intervalos de tiempo son $\Delta t_{3,4} = 0.894\,\text{ms}$, $\Delta t_{2,3} = 0.894\,\text{ms}$ y $\Delta t_{1,2} = 0.447\,\text{ms}$.

Estos valores permiten determinar la figura, tomando $t_4 = 0$. El interruptor permanece cerrado en el intervalo 3-2, con $y = 5\,\text{mm}$. Luego de t_1, permanece en $y = 0$.



(b)

La velocidad del extremo es, por definición,

$$u = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}$$

La derivada corresponde a la pendiente de la gráfica de la parte (a). Siendo lineal a tramos, la velocidad es constante en cada intervalo y vale

$$u = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

siendo Δy el desplazamiento vertical y Δt el ancho del intervalo. Numéricamente,

$$u_{3,4} = 5.61\,\text{m/s},\ u_{2,3} = 0\,\text{m/s},\ \text{y}\ u_{1,2} = -11.2\,\text{m/s}.$$

El mayor valor de velocidad (en módulo) es en el intervalo 1-2, cuando el punto está descendiendo. La velocidad vertical del origen es la misma que la de los otros puntos del pulso, en los intervalos correspondientes.

(c)

El desplazamiento en el origen es el que genera el pulso que se muestra en la figura dada. Sabemos que en $t = 0$ el desplazamiento es cero y el relé empieza a moverse. El extremo del pulso viajó hasta $x = 6\,\text{m}$. El instante en el que se tomó la fotografía es $t' = x/v = 13.4\,\text{ms}$.

(d)

La energía cinética de un elemento de la cuerda de longitud infinitesimal dx, con velocidad vertical $u(x,t)$, es

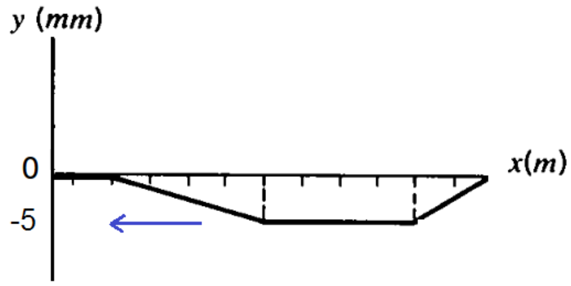
$$dE_c = \frac{1}{2}\mu dx\,[u(x,t)]^2$$

y la energía cinética del pulso es

$$\begin{aligned} E_c = \int_0^L dE_c =& \frac{1}{2}\mu \int_0^L dx\, u^2 \\ =& \frac{M}{2L}\left[(u_{1,2})^2(x_2-x_1)+(u_{2,3})^2(x_3-x_2)+(u_{3,4})^2(x_4-x_3)\right] \\ =& 9.375\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

(e)

Luego de la reflexión en un extremo fijo, el pulso se invierte y viaja en dirección contraria. La forma de la cuerda es como muestra la figura.



Ejercicio 2

(a)

Consideremos un cilindro coaxial de largo L y radio r, con $a < r < b$. El flujo de calor entre esta superficie y una próxima de radio $r + dr$, es, por simetría y de acuerdo con la ley de conducción de Fourier,

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr}$$

donde $A = 2\pi rL$ es la superficie lateral del cilindro, y $dT = T(r+dr) - T(r)$ es la diferencia de temperatura entre las superficies. Separando las variables, podemos escribirse

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{2\pi Lk}\frac{dr}{r}$$

Se puede integrar ambos lados de la igualdad, entre la superficie de $r = a$ y la de $r = b$, tomando en cuenta que $\dot{Q}$ no depende de r. El lado izquierdo es

$$\int_{T_a}^{T_b} dT = T_b - T_a$$

y el lado derecho

$$-\frac{\dot{Q}}{2\pi Lk}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{\dot{Q}\ln(b/a)}{2\pi Lk}$$

El factor que multiplica a $-\dot{Q}$ es, por definición, la resistencia térmica de conducción, es decir

$$R_c = \frac{\ln(b/a)}{2\pi Lk}$$

(b)

Con los datos provistos, la resistencia de conducción del cilindro de madera es

$$R_c = \frac{\ln(10\,\mathrm{cm}/5\,\mathrm{cm})}{2\pi\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 0.10\frac{W}{mK}} = 0.368\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Supongamos que el cilindro de metal libera de una cantidad de calor infinitesimal $dQ > 0$. A esto corresponde un cambio de temperatura $dT < 0$ (la temperatura desciende) según

$$dQ = -C dT_a$$

siendo C la capacidad calorífica del cilindro (la temperatura del cilindro puede considerarse homogénea e igual a T_a, ya que por ser metálico es buen conductor del calor).

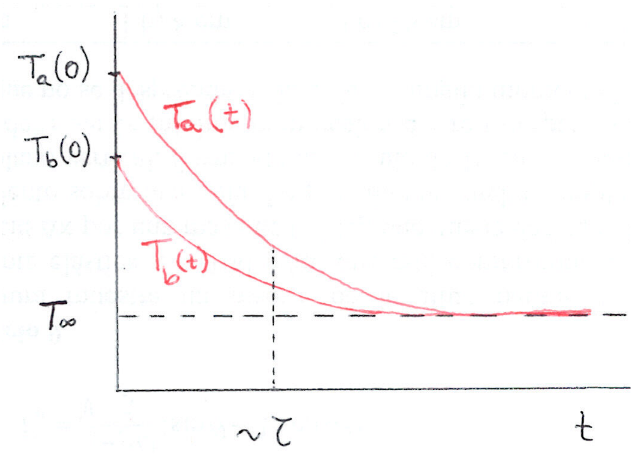
La tasa de transferencia de calor al ambiente, mediante conducción a través del cilindro de madera y luego por convección al ambiente, cumple

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{T_a - T_\infty}{R_c + R_h}$$

ya que la resistencia térmica total es la suma de cada una, por estar en serie. Cuando sustituimos dQ, obtenemos una ecuación diferencial para la temperatura,

$$\frac{dT_a}{dt} = -\frac{T_a - T_\infty}{C(R_c + R_h)} = -\frac{T_a - T_\infty}{\tau}$$

definiendo el tiempo $\tau = C(R_c + R_h) = 52\times 10^3\,\mathrm{s} = 14.5\,\mathrm{hs}$.



Tomando en cuenta la condición inicial, la solución de esta ecuación diferencial, lineal, de variables separables, es

$$T_a(t) = T_\infty + (T_a(0) - T_\infty)e^{-t/\tau} = 20\,^\circ\mathrm{C} + 80\,\mathrm{C}^\circ e^{-t/\tau}$$

La temperatura de la superficie decae exponencialmente hacia el valor ambiente, con un tiempo característico dado por τ.

(c)

En términos de la temperatura de la superficie exterior, la tasa de transferencia de calor vale

$$\dot{Q} = \frac{T_b - T_\infty}{R_h}$$

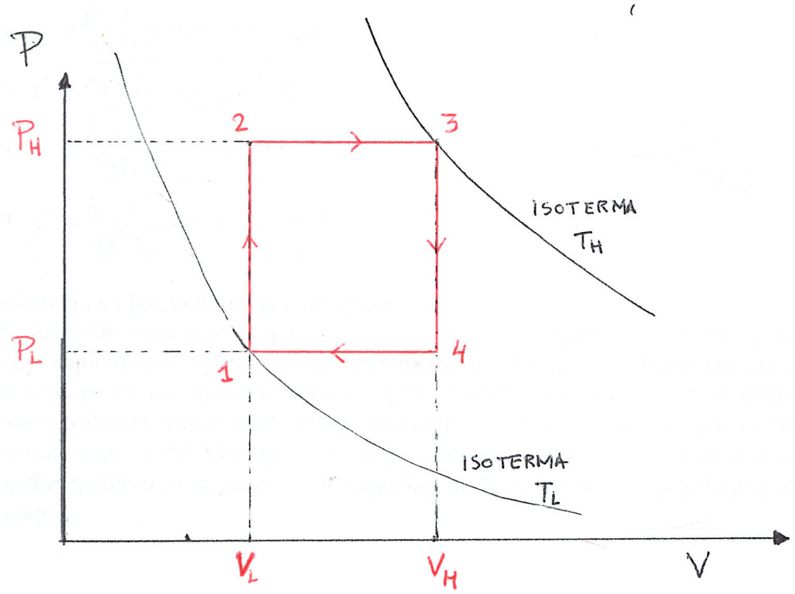
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_b(t) = T_\infty(t) - R_h\dot{Q} =& T_\infty - \frac{R_h}{R_c + R_h}(T_a(t) - T_\infty) \\ =& T_\infty - \frac{R_h}{R_c + R_h}(T_a(0) - T_\infty)e^{-t/\tau} \\ =& 20\,^\circ\mathrm{C} + 46\,\mathrm{C}^\circ e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(a)

El ciclo que produce el mayor trabajo posible es aquel que encierre una mayor área en el diagrama P-V. Para conseguirlo con las limitaciones impuestas, el ciclo debe ser como el que se muestra en la figura.



- El punto 1 tiene temperatura T_L y el volumen mínimo, $V_L = 2\,\mathrm{lt}$; su presión será $P_L = nRT_L/V_L$.

- El punto 2 tiene presión $P_H = 1\,\text{MPa}$, la máxima soportada, y volumen V_L. Su temperatura cumple $nRT_2 = P_H V_L$.
- El punto 3 tiene presión P_H y el máximo volumen, $V_H = 4\,\text{lt}$. Además, se encuentra a la temperatura $T_H = 800\,\text{K}$. Esto implica $nR = P_H V_H / T_H = 5\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$.
- El punto 4 tiene presión P_L y volumen V_H. Su temperatura cumple $nRT_4 = P_L V_H$

El ciclo mostrado produce el mayor trabajo posible usando solo procesos isóbaros e isócoros, ya que aprovecha los volúmenes máximo y mínimo, y llega a la presión máxima. El trabajo *entregado por el sistema*, que puede hallarse como el área encerrada en el diagrama, es

$$\begin{aligned} W =& (P_H - P_L)(V_H - V_L) \\ =& P_H V_H - P_H V_L + P_L V_L - P_L V_H \\ =& nR(T_H - T_4 + T_L - T_2) \end{aligned}$$

(b)

El sistema recibe calor desde la fuente en los procesos $1 \to 2$ y $2 \to 3$, que pueden determinarse usando los calores específicos del gas:

$$Q_H = Q_{12} + Q_{23} = n\tilde{c}_V (T_2 - T_L) + n\tilde{c}_P (T_H - T_2)$$

$\tilde{c}_P = 4.27R$ es conocido, y $\tilde{c}_V = \tilde{c}_P - R = 3.27R$. Por definición, la eficiencia del ciclo es $\eta = W/Q_H$. Sustituyendo el calor y el trabajo, queda

$$\eta = \frac{R(T_H - T_4 + T_L - T_2)}{\tilde{c}_V (T_2 - T_L) + \tilde{c}_P (T_H - T_2)}$$

(n se cancela). De esta expresión, hay que despejar el valor de T_L que corresponde a la eficiencia pedida, $\eta = 0.05$. Para ello, expresamos T_2 y T_4 en términos de los datos conocidos:

$$T_2 = \frac{P_H V_L}{nR} = \frac{P_H V_L}{P_H V_H} T_H = \frac{V_L}{V_H} T_H = \frac{1}{2} T_H$$

$$T_4 = \frac{P_L V_H}{nR} = \frac{P_L V_L}{P_L V_L} T_L = \frac{V_H}{V_L} T_L = 2T_L$$

usando $V_H/V_L = 2$ (estas relaciones se desprenden también de observar los procesos a presión constante $2 \to 3$ y $4 \to 1$ del ciclo). Con estos valores, y reordenando la ecuación de la eficiencia, se despeja T_L:

$$T_L = \frac{T_H}{2} \left[\frac{\eta(\tilde{c}_V/R + \tilde{c}_P/R) - 1}{\eta \tilde{c}_V/R - 1} \right]$$

Numéricamente,

$$T_L = \frac{800\,\text{K}}{2} \cdot \frac{0.05 \times (3.27 + 4.27) - 1}{0.05 \times 3.27 - 1} = 297\,\text{K}$$

Pregunta 1

(a)

La bomba de calor extrae en cada ciclo calor Q_L del exterior, empleando trabajo W, y deposita calor Q_H en la casa. El coeficinte de performance, COP, se define mediante

$$\mathrm{COP} = \frac{|Q_H|}{|W|}$$

También es posible definirlo mediante las potencias o tasas de transferencia, al dividir el numerador y el denominador por un mismo intervalo de tiempo:

$$\mathrm{COP} = \frac{|Q_H|/\Delta t}{|W|/\Delta t} = \frac{|\dot{Q}_H|}{|\dot{W}|}$$

(b)

El coeficiente máximo de una bomba que opera entre esas temperaturas lo tiene una bomba reversible, para la cual se verifica la relación

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}$$

(ya que la variación de entropía del universo es $\Delta S = 0$). La primera ley de la termodinámica aplicada en un ciclo implica que

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|$$

Usando las relaciones anteriores, el $\mathrm{COP}_{\max}$ adopta el valor

$$\mathrm{COP}_{\max} = \frac{|Q_{H,rev}|}{|W_{rev}|} = \frac{|Q_{H,rev}|}{|Q_{H,rev} - |Q_{L,rev}|} = \frac{T_H}{T_H - T_L} = 19.53$$

Para la bomba enunciada, $\mathrm{COP} = 0.2 \times \mathrm{COP}_{\max} = 3.91$.

Para mantener la temperatura de la casa, la bomba debe compensar las pérdidas y por lo tanto $|\dot{Q}_H| = |\dot{Q}_P|$. Entonces, la potencia necesaria para operar la bomba será

$$\dot{W} = \frac{|\dot{Q}_P|}{\mathrm{COP}} = \frac{13.5\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}}{3.97} = 3.45\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}} = 958\,\mathrm{W}$$

Pregunta 2

(a)

Consideremos un eje z normal a la superficie, orientado saliente a ella. ¿Cuántas partículas con componente de velocidad u_z chocan con la superficie en un tiempo Δt?

Todas las partículas con este valor de velocidad que se encuentren a una distancia igual o menor a $u_z \Delta t$ chocarán con la superficie. Esto define un cilindro imaginario de altura $u_z \Delta t$ y base $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ (el área de la superficie del agua), tal que todas las partículas de su interior con componente de velocidad u_z llegarán a la superficie en el intervalo Δt. Si la densidad de partículas es N/V, este valor es

$$u_z \Delta t \cdot A \cdot \frac{N}{V} \cdot f_z(u_z) du_z$$

donde $f_z(u_z)du_z$ representa la fracción de partículas cuyas velocidades están comprendidas en el intervalo infinitesimal $[u_z, u_z + du_z]$. Para un gas ideal a temperatura T, $f_z(u_z)$ está dada, como se desprende de la distribución de Maxwell-Boltzmann, por

$$f_z(u_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mu_z^2}{2kT}\right\}$$

donde m es la masa de las partículas y k es la constante de Boltzmann.

¿Cuál es el número total de partículas que impactan con la superficie en un intervalo Δt?

Hay que aplicar lo anterior, pero tomando en cuenta todos los valores posibles de u_z. Esto significa que hay que integrar el resultado anterior para u_z entre 0 e infinito (los valores negativos no cuentan, ya que corresponden a partículas que se alejan de la superficie y por lo tanto no chocarán con ella). Entonces, la cantidad de partículas que chocan, por unidad de tiempo, se expresa mediante

$$\int_0^\infty u_z \cdot A \cdot \frac{N}{V} \cdot f_z(u_z) du_z = A\frac{N}{V}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \int_0^\infty u_z \cdot \exp\left\{-\frac{mu_z^2}{2kT}\right\} du_z$$

El resultado de la integral se halla aplicando una de las fórmulas dadas, obteniendo kT/m. Mediante la ecuación de estado del vapor asumido como gas ideal, la densidad se expresa como $N/V = P/kT$. Conociendo la masa molar del agua w, la masa de cada partícula es $m = w/N_A$, siendo N_A el número de Avogadro. Además, $k = R/N_A$. Al sustituir estas relaciones, encontramos que la tasa de choques vale

$$\dot{N}_v = A\frac{P}{kT}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \frac{kT}{m} = \frac{AP}{\sqrt{2\pi mkT}} = \frac{APN_A}{\sqrt{2\pi wRT}}$$

(b)

A partir de la expresión anterior para el número de partículas que chocan por unidad de tiempo, el número de moles se calcula dividiendo por N_A. Por lo tanto, sustituyendo los valores enunciados,

$$\frac{AP}{\sqrt{2\pi wRT}} = \frac{1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 \cdot 101.3 \times 10^3\,\mathrm{Pa}}{\sqrt{2\pi \cdot 18 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{mol}} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}} \cdot 373\,\mathrm{K}}} = 54.1\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$$

Pregunta 3

La mínima velocidad necesaria corresponde a una situación en la que la moneda se mueve a velocidad constante. Para ello, las fuerzas ejercidas debido a la presión del aire deben cancelar el peso. Si P_1 es la presión en la cara inferior y P_2 es la presión en la cara superior, y A es el área de cada cara, entonces

$$(P_2 - P_1)A + mg = 0$$

La presión en la cara inferior es igual a la presión atmosférica P_0, ya que el aire se encuentra en reposo. Luego, consideremos una linea de corriente horizontal que pasa por encima de la moneda. Sobre la moneda el aire se mueve rápidamente, pero lejos, el aire estará en reposo y a la presión atmosférica P_0. De manera, que aplicando la ecuación de Bernoulli,

$$P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 = P_0 + \rho g h_2$$

(la altura h_2 es la misma porque la linea de corriente es horizontal). Dado que $P_1 = P_0$, resulta

$$P_2 - P_1 = -\frac{\rho v_2^2}{2}$$

(el signo negativo indica que la presión ejerce una fuerza que se opone al peso). Sustituyendo esto en el balance de fuerzas y despejando v_2, queda

$$v_2 = \sqrt{\frac{2mg}{A\rho}} = 11.7\,\mathrm{m/s}$$